

---

## Matematiikan perusopintojakso

Kevät 2009

### Harjoitus 11 (viikko 14)

---

1. Sovita PNS-suora tason pistejoukkoon  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$  ja  $(3, 2)$ . Hahmottele sekä PNS-suora että annetut pisteet samaan koordinaatistoon.
2. Etsi suurin mahdollinen  $xy$ -tason osajoukko, missä funktio  $f(x, y)$  on määritelty, kun
  - a)  $f(x, y) = \ln(x - y)$ ,    b)  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ .Hahmottele määrittelyjoukot  $xy$ -koordinaatistoon.
3. Hahmottele funktion  $f(x, y) = 2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y$  kuvaaja  $xyz$ -koordinaatistoon.  
*Opastus:* Katso Esimerkki 4.1.4.
4. Hahmottele funktion  $f(x, y)$  tasa-arvokäyriä  $xy$ -koordinaatistoon, kun
  - a)  $f(x, y) = y - \cos x$ ,    b)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$ .*Opastus:* Täydennä ”neliöön”(ympyrän yhtälöksi) kohdassa b).
5. Laske seuraavat raja-arvot.
  - a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,    b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} \frac{9 - x^2}{1 + xy}$ .
6. Osoita, että raja-arvoa  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  ei ole olemassa.  
*Opastus:* Anna pisteen  $(x, y)$  lähestyä origoa  $(0, 0)$  koordinaattiakseleita pitkin. Raja-arvon tulee olla yksikäsitteinen, mikäli se on olemassa.
7. Laske  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , kun
  - a)  $f(x, y) = xe^{x+2y}$ ,    b)  $f(x, y) = \frac{3x + 2y}{x^2 + y^2 + 1}$ .