
Matematiikan perusopintojakso

Kevät 2009

Harjoitus 13 (viikko 17)

1. Taidetakomo valmistaa suorakulmaisen särmiön muotoisen arkun, jonka päädyt ovat neliöitä. Arkun pystyreunoihin ja sen kannen reunoihin tulee rautakoristelista. Koristelista saa kulua korkeintaan 6 m. Määrää suurimman tällaisen arkun mitat ja laske sen tilavuus.
2. Määrää funktion $f(x, y) = x^2 - y^2 - y$ suurin arvo, kun muuttujia x ja y sitova ehto on $x^2 + y^2 = 1$, sekä sijoitusmenetelmällä että Lagrangen menetelmällä.
3. Määrää Lagrangen menetelmällä funktion $f(x, y) = 2x + y$ maksimi- ja minimiarvot yksikköympyrällä $x^2 + y^2 = 1$.
4. Etsi Lagrangen menetelmällä funktion $f(x, y) = (x + 1)^2 + y^2 - 1$ mahdolliset ääriarvokohdat, kun muuttujia sitova ehto on $3x^2 + 3y^2 = 48$.
5. Olkoon funktio $f(x, y) = xe^y - ye^x$. Arvioi kokonaisdifferentiaalilla avulla funktion f arvon muutosta siirryttäessä pisteestä $(1; -1)$ pisteeseen $(1, 1; -1, 2)$. Vertaa tulosta oikeaan muutokseen.
6. Laske funktion $f(x, y)$ kokonaisdifferentiaali $df(x, y)$, kun
 - a) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$,
 - b) $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$.
7. Fysiikan peruskurssin töissä pitää määrittää äänen nopeus ilmassa. Kun ääniaalto etenee ilmassa vakioämpötilassa, voidaan nopeus laskea kaavasta

$$v = \gamma \lambda,$$

missä v on äänen nopeus, γ ääniaallon taajuus ja λ ääniaallon aallonpituus. Eräs oppilas sai mittaustuloksikseen

$$\gamma = 3850 \pm 60 \frac{1}{s} \quad \text{ja} \quad \lambda = 0,0900 \pm 0,0002 \text{ m}.$$

Laske mittaustulosten perusteella äänen nopeus ilmassa virherajoineen. Käytä maksimivirheen arviointiin kokonaisdifferentiaalia.