Matematiikan perusopintojakso
Kevät 2009
Harjoitus 3 (viikko 6)

1. Olkoon
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{kun } x < -1, \\ a - x^3, & \text{kun } x > -1. \end{cases}$$
Millä vakion a arvoilla voidaan $f(-1)$ määritellä siten, että funktiosta f tulee jatkuva joukossa $\mathbb{R}$? Miten $f(-1)$ on määriteltävä?

2. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että yhtälöllä $x^4 - 2x^3 + 4x - 4 = 0$ on juuri avoimella välillä $]0, 2[$.

3. Olkoon $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$.

   a) Määrää funktion f sen sekanttisuoran yhtälö, joka leikkaa funktion f kuvaajan kohdissa $x = -1$ ja $x = 0$.

   b) Määrää funktion f tangentin yhtälö kohdassa $x = 0$.

4. Laske derivaatan määritelmän avulla $f'(x)$, kun $f(x) = \sqrt{3x + 1}$.

5. Funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + 2x^3$, on käänteisfunktio f^{-1}. Laske käänteisfunktion derivaatta $(f^{-1})'(3)$

   a) muodostamalla käänteisfunktion lauseke,

   b) käyttämällä käänteisfunktion derivaatan kaavaa.

6. Derivoi funktiot

   a) $f(x) = (6x - 3)^2$ b) $f(x) = (3x-2)(4+2x)$ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$

   d) $f(x) = \ln(x^3)$ e) $f(x) = \cos^3(2x)$ f) $f(x) = \sqrt{x}e^{2x-1}$.

7. Osoita, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, on konveksi.

8. Määrää, milloin funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$, kuvaaja on alaspäin ja milloin ylöspäin kupera. Ilmoita myös funktion kuvaajan käännepisteet.