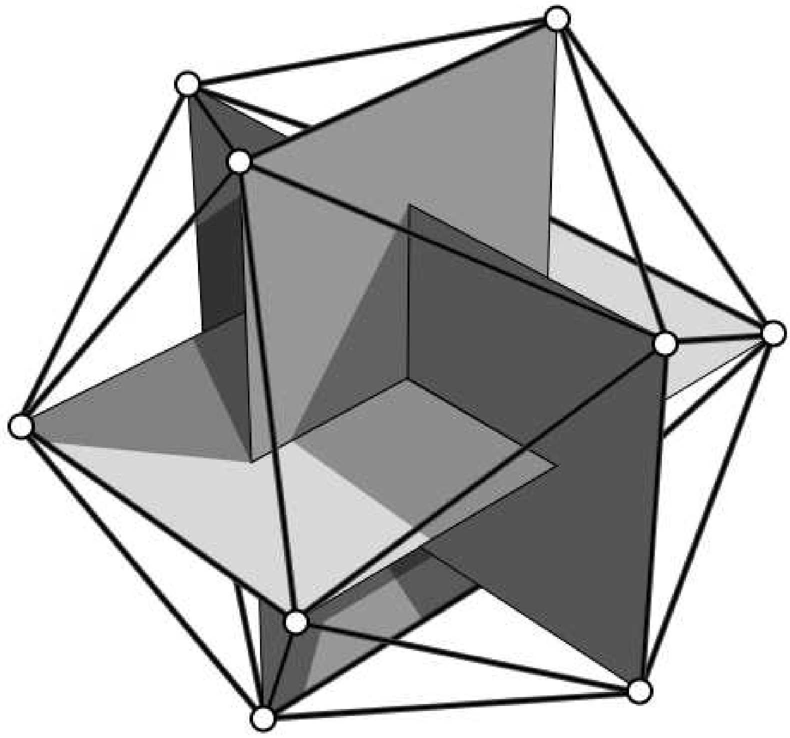
VERKKOTEORIAN ALKEITA

Martti E. Pesonen

28.2.2013



Sisältö

Merkinnät

Kurssilla käytetään mm. seuraavia vakiintuneita logiikan, joukko-opin ym. merkintöjä:

$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$	ei, tai, ja, seuraa, yhtäpitävä
$\exists$, $\forall$	on olemassa, kaikilla
$\in$, $\ni$	kuuluu joukkoon
$\subseteq$ tai $\subset$	osajoukko, aito osajoukko
$\cup$, $\cup_{i=1}^{n}$, $\cup_{i=1}^{\infty}$, $\cup_{i\in I}$	yhdisteitä
$\cap$, $\cap_{i=1}^{n}$, $\cap_{i=1}^{\infty}$, $\cap_{i\in I}$	leikkauksia
$\sum$, $\sum_{i=1}^{n}$, $\sum_{i=1}^{\infty}$, $\sum_{i\in I}$	summia
$\overline{A}$, $\setminus$	komplementti, erotus
$\times$	joukkojen tulo
xRy	x relaatiossa y:hyn
$S \circ R$	yhdistetty relaatio (funktio)
$f : A \to B$	kuvaus A:lta B:lle
$x \mapsto f(x)$	x kuvautuu alkiolle $f(x)$
$\mathcal{P}(A)$	potenssijoukko
$n(A)$	A:n alkiomäärä
$P(A)$	todennäköisyys
$:=$	määritellään
$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$	luonnolliset luvut
$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	perusluvut
$[0] := \emptyset$	lukumääräjoukko:
$[n] := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$	jos $n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$	kokonaisluvut
$\mathbb{Q}$	rationaaliluvut
$\mathbb{R}$	reaaliluvut
$\mathbb{R}^n := \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_k \in \mathbb{R} \,\}$	euklidinen n-ulotteinen avaruus
$]a, b[$, $[a, b]$	avoin, suljettu väli
$]a, b]$, $[a, b[$	puoliavoimet välit

1 VERKOISTA

Tässä Luvussa tutkimme matemaattisia rakenteita, joilla on hyvin keskeinen merkitys nykyelämässä, vaikka itse infrastruktuuri onkin usein piilossa. Perinteisiä *verkkojen* sovellusalueita ovat olleet mm. tiestön ja vesistön, puhelin- ja sähköverkkojen sekä putkistojen mallitus. Uudempia verkkoina esitettävissä olevia struktuureja ovat esimerkiksi integroidut piirit ja mikroprosessorit, tietokoneohjelman vuokaaviot, yrityksen henkilöstöstruktuurit, tietopankit, internet ja talouselämän rakenne.

1.1 Mitä matemaattiset verkot ovat?

Verkko eli *graafi* koostuu pisteistä eli *solmuista* ja näitä mahdollisesti yhdistävistä *kaarista* tai suunnatuista kaarista eli *nuolista*.

- *Suuntaamaton verkko* soveltuu sellaisten struktuurien malliksi, joissa materia tai informaatio voi liikkua kahta kohdetta yhdistävässä välineessä kumpaan suuntaan tahansa.
- *Suunnattua verkkoa* käytetään mallina struktuureissa, joissa liikenne kahden solmun välillä saattaa olla yksisuuntaista.
- *Painotettu verkko* voi olla kumpaa tahansa edellisistä tyypeistä, ja siinä on lisäksi solmuilla, kaarilla tai nuolilla jotkin painokertoimet, esimerkiksi kaarilla pituudet tai solmuilla tärkeyskertoimet.

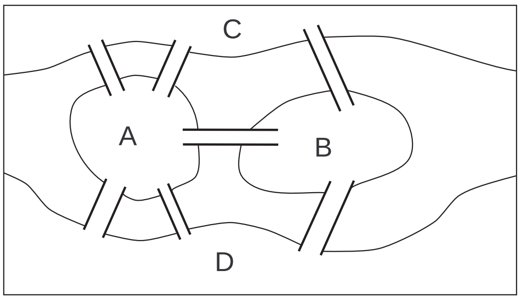
Tarkat määritelmät esiintyvät myöhemmin (ks. Luvut 1.2, 1.3 ja 1.4).

1.1.1 Verkkoteorian synty

Verkkojen tutkimuksen katsotaan alkaneen nk. Königsbergin (nykyisen Venäjän Kaliningrad) sillat-ongelmasta 1700-luvulla:

> Kaupungin läpi virtaa Pregel-joki, jossa on peräkkäin kaksi saarta, A ja B. Saaresta A on kaksi siltaa ja saaresta B yksi silta molemmille rannoille. Saaret yhdistää toisiinsa yksi silta, yhteensä siis 7 siltaa. Kaupunkilaisia askarrutti se, *onko mahdollista tehdä kävelyretki, jonka aikana kukin silta ylitetään tasan kerran?*

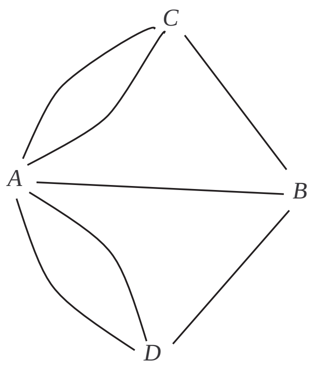
Asiaa tiedusteltiin kuuluisalta sveitsiläiseltä matematiikolta Leonhard Eulerilta, joka *todisti*, ettei ratkaisua ole. Eulerin alkuperäinen päättely oli seuraava:



Kuva 1: Königsbergin sillat 1700-luvulla

> *Montako kertaa kävelijä käy retken aikana saarella A? Jos hän käy kerran, kahdesti tai kolmesti, hän käyttää vastaavasti 2, 4 tai 6 siltaa, joiden toinen pää on kyseisellä saarella. Mutta siltoja onkin 5!*

Euler kiinnostui tämänkaltaisista ongelmista enemmänkin ja näin syntyi uusi matematiikan haara, *verkkoteoria*, jossa tutkitaan *solmujen* ja niitä yhdistävien *kaarien* muodostamien rakenteiden ominaisuuksia. Esimerkiksi Königsbergin sillat-ongelma voidaan tulkita verkoksi sopimalla rannat ja saaret solmuiksi ja sillat kaariksi, ks. Kuva 2.



Kuva 2: Königsbergin sillat verkkokaaviona

1.2 Suuntaamaton verkko

Suuntaamattomassa verkossa emme käytä järjestettyjä pareja, koska niihin liittyy luonnollisella tavalla suunta.

Määritelmä 1.2.1 Joukon $\mathbf{X}$ *järjestämätön* eli *ei-järjestetty tulo* on sen järjestämättömien parien $\langle x_1, x_2 \rangle$ joukko

$$\mathbf{X} \,\&\, \mathbf{X} = \{ \langle x_1, x_2 \rangle \mid x_1, x_2 \in \mathbf{X} \}.$$

Määritelmä 1.2.2 Kolmikko $(\mathbf{X}, E, \Psi)$ on *suuntaamaton verkko* eli *graafi* (*(undirected) graph, multigraph*), jos $\mathbf{X} \neq \emptyset$ ja E ovat joukkoja ja $\Psi : E \to \mathbf{X} \,\&\, \mathbf{X}$ on kuvaus.

Nimityksiä:

solmu (*vertex, node*)	=	joukon $\mathbf{X}$ alkio
kaari tai väli (*edge, link, arc*)	=	joukon E alkio
vastaavuuskuvaus	=	funktio Ψ

Jos $\Psi(e) = \langle x, y \rangle$, käytetään sanontoja:

- x ja y ovat kaaren e *päitä*
- kaari e *yhdistää* solmut x ja y
- kaari e *liittyy* solmuihin x ja y
- solmut x ja y liittyvät kaareen e.

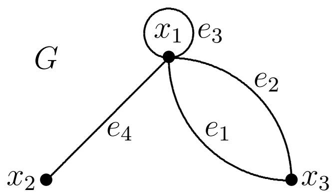
Kaksi solmua ovat *vierekkäisiä* (*adjacent*), jos ne ovat saman kaaren päitä. Kaksi kaarta ovat

- *rinnakkaisia* (*parallel*), jos niillä on yhteiset päät.
- *vierekkäisiä*, jos niillä on ainakin yksi yhteinen pää.

Jos $\Psi(e) = \langle x, x \rangle$, on kaari e *silmukka* eli *luuppi*.
Solmun $x \in \mathbf{X}$ *asteluku* (*degree*) $d_G(x)$ on solmuun liittyvien kaarten määrä, kun silmukan liittyminen otetaan kaksinkertaisena.
Solmu $x \in \mathbf{X}$ on *erillinen* tai *eristetty* (*isolated*), jos $d_G(x) = 0$.

Esimerkki 1.2.3 Olkoon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$, missä
$\mathbf{X} := \{x_1, x_2, x_3\}$
$E := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
$\Psi(e_1) = \Psi(e_2) := \langle x_1, x_3 \rangle$
$\Psi(e_3) := \langle x_1, x_1 \rangle$

$\Psi(e_4) := \langle x_1, x_2 \rangle$.



Kaaren e_4 päät ovat x_1 ja x_2. Solmuun x_3 liittyvät kaaret e_1 ja e_2.
Asteet: $d_G(x_1) = 5$, $d_G(x_2) = 1$ ja $d_G(x_3) = 2$.
Kaaret e_1 ja e_2 ovat rinnakkaisia ja vierekkäisiä, kaaret e_1 ja e_3 vierekkäisiä.
Verkossa on yksi silmukka eikä lainkaan erillisiä solmuja.

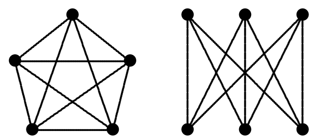
Verkon G sanotaan olevan

- *degeneroitunut* eli *surkastunut*, jos $E = \emptyset$,
- *äärellinen*, jos $\mathbf{X}$ ja E ovat äärellisiä,
- *täydellinen* (complete), jos jokaista solmuparia $x \neq y$ yhdistää ainakin yksi kaari,
- *yksinkertainen* (simple), jos siinä ei ole silmukoita eikä rinnakkaisia kaaria.

Huomautus 1.2.4 Yksinkertaisessa verkossa voidaan solmupari $\langle x, y \rangle$ ja kaari $e = \Psi^{-1}(\langle x, y \rangle)$ *samaistaa*, $e \sim \langle x, y \rangle$.
Jokaisesta verkosta saadaan täydellinen lisäämällä puuttuvat kaaret, samoin verkosta saadaan yksinkertainen poistamalla silmukat ja liiat rinnakkaiset kaaret.

Esimerkki 1.2.5 Esimerkin 1.2.3 verkko on äärellinen, muttei surkastunut, täydellinen eikä yksinkertainen. Miksi?

Tehtävä 1.2.6 Mitkä edellä luetelluista nimityksistä sopivat seuraaviin nk. *Kuratowskin verkkoihin* K_5 ja $K_{3,3}$:



K_5 $K_{3,3}$

1.2.1 Aliverkko

Määritelmä 1.2.7 Olkoon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ suuntaamaton verkko.

a) Verkko $G' = (\mathbf{X}', E', \Psi')$ on verkon G *aliverkko* (*subgraph*), jos verkko G' koostuu osasta verkon G solmuja ja osasta näitä yhdistäviä verkon G kaaria.

   Jos $G' \subseteq G$ on aliverkko ja sisältää *kaikki* ne verkon G kaaret, jotka yhdistävät verkon G' solmuja, niin G' on solmujoukon $\mathbf{X}'$ *virittämä* (*span*) aliverkko.

b) Verkon G *diagonaali* $\Delta_{\mathbf{X}} := \{\, \langle x, x \rangle \mid x \in \mathbf{X} \,\}$.

c) Verkon G *komplementti* on yksinkertainen verkko $\overline{G}$, johon on koottu kaikki ne kaaret (paitsi ei silmukoita), joita verkossa G ei esiinny.

Esimerkki 1.2.8 Esimerkin 1.2.3 verkon G komplementti on verkko $\overline{G} = (\mathbf{X}, F, \Gamma)$, jossa on yksi puuttuva kaari $F = \{f\} = \{\langle x_2, x_3 \rangle\}$, jolle siis $\Gamma(f) = \langle x_2, x_3 \rangle$. Solmujoukon $\{x_1, x_2\}$ virittämässä verkossa on kaaret e_3 ja e_4 ja solmujoukon $\{x_1, x_3\}$ virittämässä e_3, e_1 ja e_2.

Tehtävä 1.2.9 Mitä kaaria on joukon $\{x_2, x_3\}$ virittämässä verkossa?

Tehtävä 1.2.10 Suunnittele Königsbergiin lisää siltoja niin, että ongelmalla on ratkaisuna suljettu Eulerin ketju.

Tehtävä 1.2.11 Piirrä verkot, jotka kuvaavat Joensuun siltoja

a) kävelijän näkökulmasta,

b) autoilijan näkökulmasta.

Piirrä myös näiden komplementit ja selvitä mitä siltoja vielä puuttuu.

Tehtävä 1.2.12 Piirrä kymmensolmuinen verkko, jossa on mahdollisimman vähän kaaria, ja jossa on kolme silmukkaa, vain kaksi erillistä solmua, neljä solmua, joiden aste on 3, sekä neljä solmua, joiden asteet ovat 2.

Lause 1.2.13 Äärellisessä suuntaamattomassa verkossa
a) kaikkien solmujen asteiden summa $= 2 \cdot n(E)$.
b) paritonasteisten solmujen lukumäärä parillinen.

Todistus. a) Ajatellaan verkkoa aluksi ilman kaaria ja aletaan asettaa niitä takaisin. Kaaren lisääminen kasvattaa astelukujen summaa kahdella, joten väite on tosi.
b) Kohdan a) mukaan asteiden summa on parillinen. Parillisasteisten solmujen summa on parillinen, joten myös paritonasteisten summa on parillinen. Näin paritonasteisia ei voi olla paritonta määrää. Q.E.D

1.2.2 Äärellisten verkkojen esitystapoja

Verkko voidaan esittää mm. luettelona, kaaviona tai matriisina.
1. Luettelo sisältää solmujen ja kaarten joukot sekä vastaavuuskuvauksen (ks. Esimerkki 1.2.3).
2. Kaavioesitys on geometrinen kuvio, jossa
solmut = 2- tai 3-ulotteisen avaruuden pisteet kaaret = geometriset kaaret.
3. Yhteysmatriisi (*adjacency matrix*) $M_G = (a_{ij})_{n\times n}$ on neliömäinen taulukko, jonka rivillä i sarakkeessa j oleva luku a_{ij} ilmoittaa kuinka monta kaarta yhdistää solmun x_i solmuun x_j. Esimerkin 1.2.3 verkon yhteysmatriisi on

$$M_G = (a_{ij})_{3\times 3} = \begin{array}{c} G \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Yhteysmatriisista ei näy kaarten nimet ja solmujenkin nimet jätetään usein merkitsemättä. Yhteysmatriisi on hyvin käyttökelpoinen, kun verkkoja esitetään ja käsitellään esimerkiksi tietokoneella (matriisi- tai taulukkolaskenta).

1.2.3 Ketjut

Tarkastellaan liikkumista verkossa solmusta toiseen pitkin vierekkäisiä kaaria.

Määritelmä 1.2.14 Verkon järjestetty kaarijono $c := (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ on *ketju* (*path, chain*) solmusta x_0 solmujen x_1, x_2, …, x_{n-1} kautta solmuun x_n, jos

1) kukin e_i on solmujen x_{i-1} ja x_i välinen kaari ja

2) mikään kaari ei esiinny jonossa useammin kuin kerran.

Edelleen, solmujono $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ on ketjua c *vastaava solmujono*, merkitään $x_0 \to x_n$. Ketju on

- *suljettu* (*cycle*), jos $x_0 = x_n$, muutoin *avoin.*
- *yksinkertainen*, jos sitä vastaavan solmujonon solmut ovat eri solmuja paitsi mahdollisesti $x_0 = x_n$.
- *pituudeltaan* $|c|$:= sen kaarien lukumäärä.

Tehtävä 1.2.15 Olkoon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$, missä
$\mathbf{X} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$,
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$,
$\Psi(e_1) = \langle x_0, x_1 \rangle$,
$\Psi(e_2) = \langle x_1, x_3 \rangle$,
$\Psi(e_3) = \langle x_3, x_4 \rangle$,
$\Psi(e_4) = \langle x_4, x_1 \rangle$.
Piirra oheen kyseinen verkko ja muodosta sen yhteysmatriisi.

Esimerkki 1.2.16 Tarkastellaan Tehtävän 1.2.15 verkkoa. Silloin kaarijono $c := (e_1, e_2, e_3, e_4)$ on ketju alkupäänä x_0 ja loppupäänä x_1, se kulkee solmujen x_0, x_1, x_3, x_4, x_1 kautta ja sen pituus on $|c| = 4$. Se ei ole suljettu eikä yksinkertainen.
Jono (e_2, e_3, e_4) on yksinkertainen suljettu ketju $x_1 \to x_1$.
Jono (e_1, e_2, e_3) on avoin yksinkertainen ketju $x_0 \to x_4$.
Kaarijonot (e_1, e_2, e_2) ja (e_2, e_3, e_4, e_2) eivät ole ketjuja.

Tehtävä 1.2.17 Usein ketju voidaan ilmaista pelkkänä solmujonona, mutta ei aina. Milloin solmujonon antaminen ei riitä?

1.2.4 Yhtenäisyys

Määritelmä 1.2.18 Suuntaamaton verkko on *yhtenäinen* (connected), jos sen jokaista solmuparia $x \neq y$ kohti on olemassa ketju $x \to y$; muutoin se on *epäyhtenäinen*.

Osoittautuu, että verkko voidaan jakaa erillisiin yhtenäisiin osiin: relaatio

$$S := \{(x, y) \mid x = y \text{ tai on olemassa ketju } x \to y\}$$

voidaan osoittaa ekvivalenssiksi. Se jakaa solmujoukon $\mathbf{X}$ ekvivalenssiluokkiin $S(x)$, jotka siis muodostavat osituksen. Kukin osituksen solmujoukko virittää aliverkon, joka on itsessään yhtenäinen verkko.

Määritelmä 1.2.19 Suuntaamattoman verkon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ *yhtenäiset komponentit* ovat ekvivalenssiluokkien $S(x)$, $x \in \mathbf{X}$, virittämät aliverkot.

Verkon yhtenäiset komponentit (ja yhtenäisyys) voidaan selvittää esimerkiksi seuraavilla menetelmillä:

- *depth-first-menetelmä:* lähdetään yhdestä solmusta seuraamaan ketjua niin, ettei vierailla missään solmussa kuin kerran; kun joudutaan umpikujaan, palataan edelliseen risteykseen ja tutkitaan seuraava reitti jne.

- *breadth-first-menetelmä:* lähdetään yhdestä solmusta ja edetään kaikkia siitä lähteviä ketjuja seuraaviin, seuraavista solmuista taas kaikkia niitä seuraaviin jne. niin ettei missään solmussa käydä enempää kuin kerran.

Näin tullaan vierailleeksi lähtösolmun määräämän yhtenäisen komponentin kaikissa solmuissa.

Tehtävä 1.2.20 Tehtävän 1.2.15 verkko on epäyhtenäinen. Määritä yhtenäiset komponentit.

Määritelmä 1.2.21 Yhtenäisen verkon kaarta sanotaan *sillaksi* (*bridge*), jos sen poistaminen epäyhtenäistää verkon.

Tehtävä 1.2.22 Missä edellä olleissa esimerkkiverkoissa on siltoja? ———

1.3 Suunnattu verkko

1.3.1 Suunnattu vs. suuntaamaton

Jos verkon solmuja yhdistävät kaaret ovat yksisuuntaisia, niitä sanotaan *nuoliksi* eli *suunnatuiksi väleiksi* (*arc, arrow*).

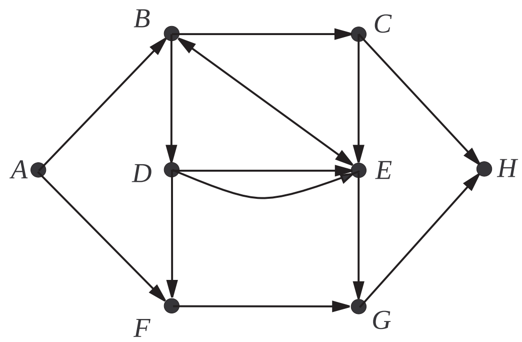
Määritelmä 1.3.1 Kolmikko $G = (\mathbf{X}, U, \Psi)$ on *suunnattu verkko* eli *digraafi* (*directed graph, digraph*), jos

(i) solmujoukko $\mathbf{X}$ ei ole tyhjä,

(ii) U on nuolten joukko,

(iii) $\Psi : U \to \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ on vastaavuuskuvaus.

Esimerkki 1.3.2 Kuvassa 3 on eräs 8-solmuinen suunnattu verkko.



Kuva 3: Suunnattu verkko

Nimityksiä. Jos $\Psi(u) = (x, y)$,

- solmu x on nuolen u *lähtösolmu*,
- solmu y on nuolen u *maalisolmu*,
- solmut x ja y ovat *päätesolmuja*.

Edelleen käytetään myös nimityksiä (ks. Luku 1.2) *liittyy*, *vierekkäinen*, *rinnakkainen*, *silmukka* eli *luuppi*, *erillinen*, *surkastunut*, *äärellinen*.
Nuolet $u \neq v$ ovat

- *vahvasti rinnakkaiset*, jos $\Psi(u) = \Psi(v)$,

- *vastakkaiset*, jos $\Psi(u) = (x, y)$ ja $\Psi(v) = (y, x)$.

Solmun x

- *lähtöaste* (*out-degree, positive degree*) $d_G^+(x)$ on solmusta lähtevien nuolten lukumäärä,
- *maaliaste* (*in-degree, negative degree*) $d_G^-(x)$ solmuun saapuvien nuolten lukumäärä.

Verkko on

- *täydellinen*, jos jokaista solmuparia $x \neq y$ kohti on nuoli $x \to y$ tai $y \to x$,
- *yksinkertainen*, jos se ei sisällä silmukoita eikä vahvasti rinnakkaisia nuolia.

Käsitteet *aliverkko*, *virittäminen*, *diagonaali* ja *komplementti* määritellään kuten suuntaamattomalle verkolle.

Tehtävä 1.3.3 Selvitä Kuvan 3 suunnatusta verkosta seuraavat asiat:

- a) Solmujen asteet: ______________________________
- b) Onko se yksinkertainen ________, onko se täydellinen ________
- c) Mitä rinnakkaisia nuolia löydät: ________________________

Suunnattua verkkoa *vastaava suuntaamaton verkko* saadaan muuttamalla nuolet kaariksi. Myös suuntaamaton verkko voidaan *suunnistaa*, kunhan sovitaan korvataanko kaari vastakkaisilla nuolilla vai käytetäänkö jotain muuta menetelmää.

Tehtävä 1.3.4 Piirrä oheen suunnattu verkko $G = (\mathbf{X}, U, \Psi)$, jossa
$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$,
$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$,
$\Psi(u_1) = (x_3, x_1)$,
$\Psi(u_2) = (x_1, x_3)$,
$\Psi(u_3) = (x_1, x_1)$,
$\Psi(u_4) = (x_1, x_2)$.

Esimerkki 1.3.5 Tehtävän 1.3.4 verkko G ei ole yksinkertainen eikä täydellinen, miksi? ______________________________
Solmun x_1 asteet ovat

$$d_G^+(x_1) = 3, \quad d_G^-(x_1) = 2,$$

Komplementin nuolet ovat (x_2, x_1), (x_2, x_3) ja (x_3, x_2).

Tehtävä 1.3.6 Tehtävän 1.3.4 muiden solmujen asteet ovat: ____________

Lause 1.3.7 Äärellisen suunnatun verkon solmujen lähtö- ja maaliasteiden summa $= 2 \cdot n(U)$.

Todistus. Jokaisella nuolella on yksi lähtö ja maali. Q.E.D
Suunnattuja verkkoja esitetään luetteloina, kaavioina ja yhteysmatriiseina. Tehtävän 1.3.4 yhteysmatriisi

$$M_G = (a_{ij})_{3\times 3} = \begin{array}{c c} G & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Suunnattuun verkkoon $G = (\mathbf{X}, U, \Psi)$ liittyy yksinkertainen suunnattu verkko G_0, josta on poistettu ylimääräiset vahvasti rinnakkaiset nuolet. Jäljelle jääneiden nuolten (kuva)joukko $\Psi(U) \subseteq \mathbf{X}\times\mathbf{X}$ on verkon G *seuraajarelaatio* $R_G := \Psi(U)$, jolle

$$xR_Gy \iff \Psi(u) = (x, y) \text{ jollekin } u \in U.$$

Tehtävä 1.3.8 Piirrä oheen suunnattu verkko $G = (\mathbf{X}, U, \Psi)$, jossa
$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$,
$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$,
$\Psi(u_1) = \Psi(u_2) = (x_1, x_2)$,
$\Psi(u_3) = (x_1, x_3)$,
$\Psi(u_4) := (x_3, x_1)$.
Tällöin seuraajarelaatio $R_G =$ ______________________________

1.3.2 Polut ja yhtenäisyyskäsitteet

Määritelmä 1.3.9 Suuntaamattoman verkon ketjua $x_0 \to x_n$ vastaa suunnatun verkon *polku* (*path*), joka koostuu peräkkäisistä kulkusuuntaan osoittavista nuolista.
Polku p on

- *suljettu* (*cycle*), jos $x_0 = x_n$, muutoin *avoin*,
- *yksinkertainen*, jos $x_i \neq x_j$, paitsi ehkä $x_0 = x_n$.

Voidaan todistaa, että jokaista polkua $x \to y$ kohti on olemassa yksinkertainen polku $x \to y$.

Tehtävä 1.3.10 Suunnittele verkko, johon voit piirtää ei-yksinkertaisen polun solmusta x solmuun y. Valitse sitten yksinkertainen polku $x \to y$. Miten yksinkertaistusprosessi voidaan tehdä missä tahansa äärellisessä verkossa? ____

____

Esimerkki 1.3.11 Olkoot
$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$,
$U = \{u_1, u_2, u_3\}$ ja
$u_1 := (x_1, x_2)$, $u_2 := (x_2, x_3)$, $u_3 := (x_3, x_2)$.
Nuolijono
(u_1, u_2, u_3) on polku, ei suljettu eikä yksinkertainen.
(u_2, u_3) on suljettu ja yksinkertainen.
(u_1, u_2, u_3, u_2) ei ole polku.

Määritellään kaksi eriasteista yhtenäisyyden käsitettä. Ekvivalenssirelaatio

$$S := \{\, (x, y) \mid x = y \text{ tai on olemassa polut } x \leftrightarrow y \,\}$$

jakaa solmujen joukon $\mathbf{X}$ ekvivalenssiluokkiin.

Määritelmä 1.3.12 a) Suunnattu verkko on *yhtenäinen*, jos sitä vastaava suuntaamaton verkko on yhtenäinen.
b) Suunnatun verkon $G = (\mathbf{X}, U, \Psi)$ *vahvasti yhtenäiset komponentit* ovat solmujoukkojen $S(x)$, $x \in \mathbf{X}$, virittämät aliverkot. Verkko G on *vahvasti yhtenäinen*, jos sillä on vain yksi vahvasti yhtenäinen komponentti.

Esimerkki 1.3.13 Esimerkin 1.3.11 verkko on yhtenäinen, mutta ei vahvasti yhtenäinen. Sen vahvasti yhtenäiset komponentit ovat solmujoukkojen $\{x_1\}$ ja $\{x_2, x_3\}$ virittämät. Nuoli u_1 ei kuulu kumpaankaan.

Tehtävä 1.3.14 Keksi kuusisolmuinen yhtenäinen suunnattu verkko, jossa on kolme vahvasti yhtenäistä komponenttia.

1.4 Painotettu verkko

Määritelmä 1.4.1 Olkoon $G = (\mathbf{X}, A, \Psi)$ yksinkertainen suuntaamaton (tai suunnattu) verkko ja $g_A : A \to \mathbb{R}$ *painofunktio* (*weight function*), so. kuvaus, joka liittää verkon jokaiseen kaareen e *painon* $g_A(e)$. Tällöin nelikko $G = (\mathbf{X}, A, \Psi, g_A)$ on *painotettu verkko*.

Verkon painot ilmaistaan usein *painomatriisina* $M_{G,W} = (w_{ij})_{n\times n}$, joka saadaan yhteysmatriisista $M_G = (a_{ij})_{n\times n}$ korvaamalla

luvut $a_{ij} > 0$ painoilla w_{ij}

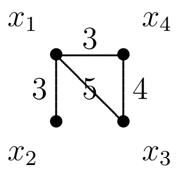
luvut $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, äärettömillä

luvut a_{ii} nollilla (tai äärettömillä).

Siis, jos solmuja x ja y yhdistää jokin kaari, painomatriisin rivin i sarakkeen j luku w_{ij} ilmaisee kyseisen kaaren painon. Jos kaarta ei ole, on paino ääretön. Joskus – esimerkiksi kauppamatkustajan ongelmassa – myös diagonaalin painot kannattaa asettaa äärettömiksi.
Jos painot ovat etäisyyksiä, painomatriisia kutsutaan usein *etäisyysmatriisiksi* (*distance matrix*).

Esimerkki 1.4.2 Seuraavassa eräs suuntaamaton painotettu verkko ja sen painomatriisi:

G



$$M_{G,W} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & \infty & \infty \\ 5 & \infty & 0 & 4 \\ 3 & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehtävä 1.4.3 Selvitä Joensuun opiskelija-asuntoloiden väliset etäisyydet ja piirrä painotettu verkko, joka kuvaa tilannetta. Muodosta myös etäisyysmatriisi.

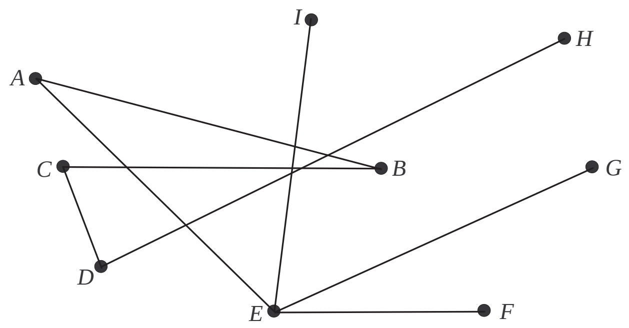
1.5 Puut ja virittävät puut

Tässä Luvussa esittelemme verkkoteoreettisia *puita* koskevia perusasioita. Lukijan olisi hyvä tutustua tarvittaviin käsitteisiin Luvuista 1.2, 1.3 ja 1.4.

1.5.1 Suuntaamaton puu

Määritelmä 1.5.1 Suuntaamaton verkko on *metsä* (*forest*), jos siinä ei ole suljettuja ketjuja. Verkko on *puu* (*tree*), jos se on yhtenäinen eikä siinä ole suljettuja ketjuja. Metsän yhtenäiset komponentit ovat siis puita.

Esimerkki 1.5.2 Kuva 4 esittää puuta, vaikkakaan se ei ole piirretty ihan standardiin muotoon.



Kuva 4: Eräs 9-solmuinen puu

Tehtävä 1.5.3 Puu on siinä mielessä optimaalinen verkko, että yhden kaaren lisääminen tuo suljetun ketjun ja toisaalta kaaren poistaminen epäyhtenäistää verkon. Koeta tätä Kuvan 4 verkolle.
Millaisen verkon saat poistamalla yhden kaaren? ____________________

Puulle, ja yleisemmin metsälle, on voimassa

Lause 1.5.4 Jos $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ on äärellinen suuntaamaton metsä, jossa on p komponenttia, on

$$n(\mathbf{X}) = n(E) + p.$$

Erikoisesti on puulle voimassa yhtälö $n(\mathbf{X}) = n(E) + 1$.

Tehtävä 1.5.5 Olkoon G verkko, jonka solmut ovat 1, 2, 3, …, 12. Sen kaaret esitetään seuraavassa listoina, joiden ensimmäinen alkio on lähtösolmu ja muut solmuja, joihin lähtösolmusta on kaari:

$[1, 4, 9]$,
$[2, 6]$,
$[3, 12]$,
$[4, 1]$,
$[5, 7, 11]$,
$[6, 2, 8]$,
$[7, 5]$,
$[8, 6]$,
$[9, 1]$,
$[11, 5, 12]$,
$[12, 3, 11]$.

a) Piirrä oheen kyseinen verkko. Onko kyseessä puu? ____________

b) Montako yhtenäistä komponenttia? ____________

c) Mitkä ovat yhtenäiset komponentit? ____________

d) Onko kyseessä metsä? ____________

1.5.2 Suunnattu juurellinen puu

Määritelmä 1.5.6 Suunnattu verkko on *juurellinen suunnattu puu juurena* (*root*) solmu j, jos vastaava suuntaamaton verkko on puu ja solmusta j on polut jokaiseen muuhun solmuun. Solmun välittömät seuraajat ovat *lapsia*, edeltäjät *vanhempia*. Lapsettomia (polkujen loppupäissä olevia) solmuja sanotaan *lehdiksi*.

Suunnattu juurellinen puu esitetään havainnollisimmin Hassen kaaviona niin, että

1) juuri piirretään ylimmäksi ja
2) lapset aina vanhempiensa alapuolelle.

Puu näyttää silloin ylösalaisin olevalta puulta (tai pensaalta). Nuolista voidaan myös jättää kärjet piirtämättä.

Tehtävä 1.5.7 Suuntaamattomasta puusta saadaan varsin luonnollisella tavalla juurellinen suunnattu puu. Miten? ____________

Tehtävä 1.5.8 Muunna yllä kuvatulla tavalla Kuvan 4 verkko niin, että solmu A on juuri ja sijaitsee ylimpänä.
Luettele puusi lehdet: ____________

1.5.3 Binääripuu

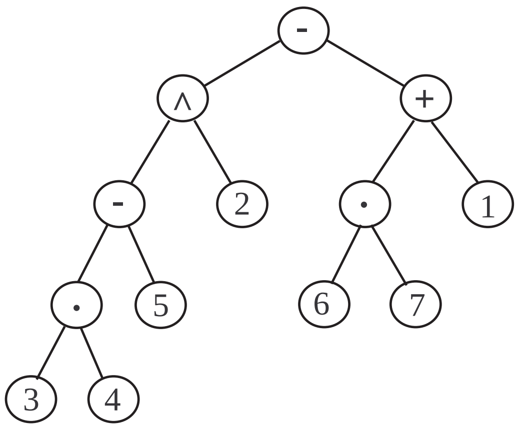
Määritelmä 1.5.9 Suunnattu juurellinen puu on *binääripuu* (*binary tree*), jos jokaisella solmulla on (enintään) kaksi lasta. Näitä kutsutaan *vasemmaksi* ja *oikeaksi*.

Binääripuita käytetään erityisesti tietotekniikassa, mutta myös monissa muissa yhteyksissä.

Esimerkki 1.5.10 Aritmeettisen lausekkeen laskujärjestys voidaan esittää binääripuuna. Esimerkiksi lauseke

$$(3{\cdot}4 - 5)^2 - (6{\cdot}7 + 1)$$

binääripuuna:



Kuva 5: Laskutoimitus binääripuuna

Tehtävä 1.5.11 Esitä ainakin kahdella eri tavalla binääripuuna lauseke

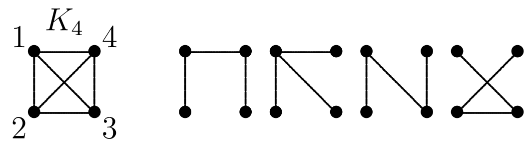
$$(a - b)(a + b),$$

missä a ja b ovat reaalilukuja.

1.5.4 Virittävä puu

Jos halutaan tutkia verkkoa lähinnä sen solmujen osalta, ei ole tarpeen käyttää sen kaikkia kaaria. Yhtenäisessä verkossa liikkuminen helpottuu, jos sille löydetään yhtenäinen aliverkko, joka sisältää samat solmut, mutta mahdollisimman vähän kaaria; siis puu.
Verkon G aliverkko, jossa on kaikki verkon G solmut ja joka on puu, on verkon G *virittävä puu* (*spanning tree*).

Esimerkki 1.5.12 Yksinkertaisen täydellisen 4-solmuisen verkon K_4 virittäviä puita on seuraavia tyyppejä



eri asennoissa, ja kussakin luokassa on 4 erilaista puuta. Yhteensä näitä on siis $4 \cdot 4 = 16$. Yleinen tulos on

Lause 1.5.13 (Cayleyn lause). Yksinkertaisella täydellisellä n-solmuisella ($n \geq 2$) suuntaamattomalla verkolla K_n on n^{n-2} erilaista virittävää puuta.

Tehtävä 1.5.14 Piirrä kaikki verkon K_3 ja $K_{3,3}$ virittävät puut.

Voidaan todistaa, että suuntaamaton verkko on yhtenäinen jos ja vain jos sillä on virittävä puu. Yhtenäisen verkon virittävän puun löytämiseksi voidaan

- vähentää verkosta kaaria niin, että verkko säilyy yhtenäisenä.
- lisätä vastaavaan tyhjään verkkoon kaaria niin paljon kuin voidaan ilman että syntyy suljettua ketjua.

Esimerkiksi depth- ja breadth-first algoritmit soveltuvat jälkimmäiseen menettelyyn.

2 VERKKO-ONGELMIA

Luvuissa 1.2,1.3,1.4 ja 1.5 on esitelty selvitelty perusasioita erilaisista verkoista. Verkkoteoriassa terminologia on siksi kirjavaa, että asioihin päällisinpuolin perehtyneenkin on syytä tarkistaa ainakin käytetyt määritelmät ennen kuin ryhtyy käyttämään hyväksi tässä Luvussa esitettäviä menetelmiä.

2.1 Reittiongelmia

Tässä Luvussa luomme katsauksen joihinkin verkkojen ketjuja tai polkuja koskeviin kuuluisiin ongelmiin. Näistä eräisiin – esimerkiksi kauppamatkustajan ongelmaan – ei nykyäänkään tiedetä hyviä, kaikenkattavia tarkkoja ratkaisumenetelmiä.

2.1.1 Eulerin ketjut

Olkoon tässä pykälässä $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ äärellinen suuntaamaton verkko, ks. Luku 1.2.

Määritelmä 2.1.1 Verkon ketju on *Eulerin ketju*, jos se sisältää kaikki verkon kaaret. Jos verkossa on suljettu Eulerin ketju, on kyseessä *Eulerin verkko*.

Jo Euler selvitti tyhjentävästi Eulerin ketjun *olemassaololle* helposti tarkastettavat ehdot (yhtenäisyys-käsite: kertaa Luku 1.2.4):

Lause 2.1.2 Olkoon G äärellinen suuntaamaton verkko, jossa ei ole erillisiä solmuja. Silloin

a) Verkossa G on suljettu Eulerin ketju jos ja vain jos G on yhtenäinen ja siinä ei ole paritonasteisia solmuja. Eulerin verkon jokainen Eulerin ketju on suljettu.

b) Verkossa G on avoin Eulerin ketju jos ja vain jos G on yhtenäinen ja siinä on täsmälleen kaksi paritonasteista solmua. Jos verkossa G on yksikin avoin Eulerin ketju, sen jokainen Eulerin ketju on avoin päinään kyseiset paritonasteiset solmut.

Todistus. (vain osittain) Todistetaan vain se puoli, josta saadaan eräs (kömpelöhkö) keino Eulerin ketjun etsimiseksi. Olkoon siis G yhtenäinen ja kaikki solmut parillista astetta. Olkoon x verkon eräs solmu ja e siihen liittyvä kaari. Toistetaan seuraavaa prosessia, kunnes kaikki kaaret ovat ketjussa:

Lähdetään solmusta x kaarta e pitkin muodostamaan ketjua, johon otetaan yksi kerrallaan uusi kaari, kunnes on pakko pysähtyä johonkin solmuun y. Asteiden parillisuudesta seuraa (miten?), että on oltava $y = x$. On saatu suljettu ketju. Asia on selvä, jos tämä ketju sisältää kaikki kaaret. Jos ei, etsitään ketjusta ensimmäinen solmu z, johon liittyy käyttämätön kaari f, otetaan z uudeksi lähtösolmuksi ja jatketaan siitä kuten edellisessä ketjussa solmuun x ja siitä edelleen solmuun z. Nimetään z solmuksi x, f kaareksi e ja palataan alkuun.

Q.E.D

Tehtävä 2.1.3 Miten Lauseen 2.1.2 kohdan b) vastaavan osan todistus, siis avoimen Eulerin ketjun etsiminen, onnistuu kohdan a) menetelmää hyväksi käyttäen? ____________________

Esimerkki 2.1.4 Königsbergin sillat-ongelmassa, Luvussa 1.1.1, kysyttiin siis, onko vastaavassa verkossa (suljettuja) Eulerin ketjuja. Kaikki neljä solmua ovat paritonta astetta, joten tuolloin siellä ei ollut avoimia eikä suljettuja Eulerin ketjuja.

Esitetään vielä konkreettisempi menetelmä, nk. Fleuryn algoritmi. Käytämme tässä käsitettä *silta*, ks. Määritelmä 1.2.21.
Fleuryn algoritmi Olkoon G yhtenäinen ja kaikki solmut parillista astetta. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että verkossa ei ole luuppeja. Lisäksi tiedetään, että verkossa G ei voi olla pelkkiä siltoja; miksi? __________

Askel 1 Valitaan jokin verkon kaari e_1, joka ei ole silta. Olkoot x_1 ja x_2 kaaren e_1 päät. Alustetaan kaari- ja solmujonot asettamalla

$$\mathbf{c_1} = (e_1) \text{ ja } \mathbf{x_1} = (x_1, x_2),$$

poistetaan e_1 verkosta G ja merkitään jäljellä olevaa verkkoa G_1. Jos verkossa G_1 ei ole kaaria, lopetetaan prosessi.

Askel 2 Jos verkossa G_1 on kaaria, ainakin yhdellä niistä on oltava päänä x_2.

Nyt valitaan näistä yksi kaareksi e_2 seuraavasti: jos näitä on vain yksi, otetaan se ja poistetaan myös (nolla-asteiseksi jäänyt) solmu x_2, muutoin poistetaan sellainen kaari, joka ei ole silta verkossa G_1. Miksi tällaisia löytyy? ____________________

Olkoon uuden kaaren toinen pää x_3. Asetetaan

$$\mathbf{c_2} = (e_1, e_2) \text{ ja } \mathbf{x_2} = (x_1, x_2, x_3).$$

Jos jäljelle jää verkko G_2, jossa ei ole kaaria, lopetetaan prosessi.

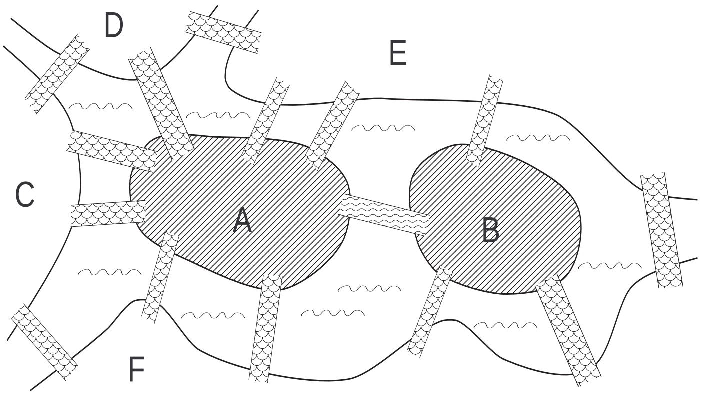
Askeleet 3 – Jos verkossa G_2 on kaaria, ainakin yhdellä on päänä x_3. Toimitaan kuten edellä, siirretään kaaria ketjuun kunnes kaaret loppuvat.

Huomautus 2.1.5 Annetusta suuntaamattomasta verkosta on *ennen algoritmien käyttöä* testattava yhtenäisyys sekä asteiden kelvollisuus.

Usein tehtävänä on lisätä (tai poistaa) annetusta verkosta minimaalinen määrä kaaria niin, että saatu verkko on Eulerin verkko.

Tehtävä 2.1.6 Mitä siltoja Königsbergiin pitäisi rakentaa, jotta saataisiin Eulerin verkko?

Tehtävä 2.1.7 Tutki Kuvan 6 Eulerin keksimää verkkoa: muodosta sen yhteysmatriisi, piirrä kaavio ja selvitä Eulerin ketjujen olemassaolo ja luonne.



Kuva 6: Eulerin keksimä verkko Tehtävässä 2.1.7

2.1.2 Hamiltonin ketjut

Olkoon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ tässä pykälässä suuntaamaton, äärellinen, yhtenäinen ja yksinkertainen verkko. Tarkastellaan yksinkertaisia ketjuja, joita pitkin voi kulkea verkon jokaisen solmun kautta täsmälleen kerran. Tällainen ketju voi olla avoin tai suljettu. Tässä tarkastellaan lähinnä suljettujen ketjujen olemassaoloa, sillä se liittyy olennaisesti nk. *kauppamatkustajan ongelmaan*.

Määritelmä 2.1.8 Yksinkertaista ketjua, joka kulkee verkon jokaisen solmun kautta, sanotaan *Hamiltonin ketjuksi*. Verkko on *Hamiltonin verkko*, jos siinä on yksikin suljettu Hamiltonin ketju.

Hamiltonin ketjujen etsiminen suurista verkoista on erittäin hankala ongelma. Ainoa yleinen menetelmä on *triviaali menetelmä* so. tutkia kaikki mahdolliset ketjut!
Tämä voidaan tehdä alkaen samaan tapaan kuin depth-first-menetelmässä: kuljetaan lähtösolmusta niin kauas kuin päästään vierailematta edellisissä solmuissa uudestaan. Jos näin saadussa ketjussa on kaikki solmut, on saatu avoin Hamiltonin ketju ja voidaan tarkastaa, voidaanko ketju sulkea. Tarvittaessa palataan edelliseen solmuun ja valitaan toinen reitti jne.
Solmuissa vierailuista pidetään kirjaa niin, että tiedetään, onko kunkin solmun kaikki lähtösuunnat jo tarkastettu.

Tehtävä 2.1.9 Olkoot
$\mathbf{X} = \{a, b, c, d, e\}$ ja
$E = \{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle d, c\rangle, \langle c, b\rangle, \langle b, e\rangle, \langle e, c\rangle\}$.
Piirrä verkko ja selvitä, onko verkossa Hamiltonin ketjuja?

Välttämättömiä ehtoja. Osoitettaessa, että verkossa *ei voi olla* suljettua Hamiltonin ketjua, voidaan käyttää seuraavia konkreettisia sääntöjä, jotka ovat ketjun olemassaololle *välttämättömiä*, tai joita tulee noudattaa ketjua muodostettaessa:

1. Jos verkossa on $n \geq 2$ solmua, avoimessa Hamiltonin ketjussa on aina $n - 1$ kaarta, suljetussa n kaarta.

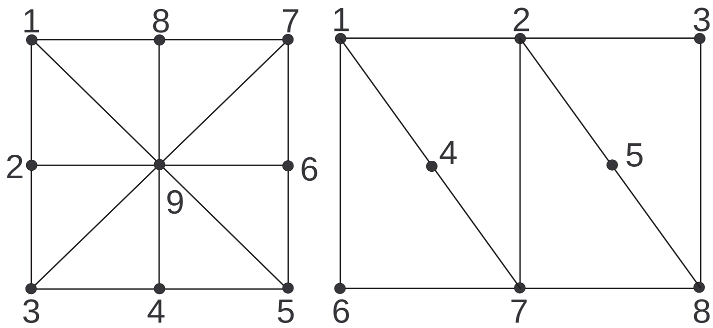
2. Jos solmun x asteluku on 2, niin molemmat kaaret, joiden päänä on x, kuuluvat jokaiseen suljettuun Hamiltonin ketjuun.

Riittäviä ehtoja. On olemassa enemmän tai vähemmän hankalia ehtoja, jotka kieltävät tai takaavat Hamiltonin ketjun olemassaolon. Tässä niistä pari; ensimmäinen on triviaali, toinen on Diracin lause vuodelta 1952:

1. Täydellisessä verkossa on suljettu Hamiltonin ketju.

2. Olkoon $G = (\mathbf{X}, E, \Psi)$ äärellinen, suuntaamaton, yhtenäinen ja yksinkertainen verkko, jossa on n solmua, $n \geq 3$. Jos $d_G(x) \geq \frac{n}{2}$ kaikilla $x \in \mathbf{X}$, on verkossa suljettu Hamiltonin ketju.

Tehtävä 2.1.10 Etsi Hamiltonin ketjut (jos niitä on) Kuvan 7 verkoista a) ja b).
Kuvion a) Hamiltonin ketju: ______________________________
Kuvion b) Hamiltonin ketju: ______________________________



Kuva 7: Verkot a) ja b) Tehtävään 2.1.10

2.1.3 Kauppamatkustajan ongelma

Kauppamatkustajan ongelmassa (*travelling salesperson problem*) henkilön täytyy käydä kiertomatkallaan täsmälleen kerran jokaisessa Suomen kaupungissa.
Onko tämä ylipäätään mahdollista?
Jos on, mikä on lyhin reitti?

> *Matemaattinen muotoilu:* kaupungit verkon solmuja ja tiet kaaria, joilla on painoina kaupunkien väliset etäisyydet. Onko näin muodostuvassa verkossa suljettu Hamiltonin ketju? Jos on, mikä niistä on lyhin?

Periaatteessa ratkaisun löytää tutkimalla kaikkia mahdollisia suljettuja Hamiltonin ketjuja. Esimerkiksi täydellisessä n-solmuisessa verkossa on $(n-1)!$ (kertoma) kappaletta erilaisia suljettuja Hamiltonin ketjuja, joten menetelmä on äärimmäisen työläs. Kelvollista nopeata yleistä menetelmää ei ole onnistuttu kehittämään; kyseessä onkin *kompleksisuudeltaan nk. $\mathcal{NP}$-täydellinen ongelma.*

Tehtävä 2.1.11 Millainen reitti kannattaa valita henkilön, joka jakaa postia Joensuun opiskelija-asuntoloihin (ks. Tehtävä 1.4.3)?

Suurissa verkoissa on usein ainoa keino turvautua approksimatiivisiin ratkaisuihin. Näitä on nykyään kehitteillä runsaasti ja parhaimmillaan päästään ratkaisuihin, jotka poikkeavat oikeasta vain muutaman prosentin verran.
Quick travelling salesperson-algoritmi. Olkoon G yksinkertainen täydellinen painotettu verkko, jossa on n solmua. Oletetaan, että verkon painot toteuttavat *kolmioepäyhtälön*

$$w_{ik} \leq w_{ij} + w_{jk}$$

– mutkan kautta ei ole lyhyempi matka kuin suoraan – minkä useimmat käytännön ongelmat toteuttavatkin.
Voidaan osoittaa, että seuraava menetelmä antaa kohtuullisen hyvän *approksimatiivisen* ratkaisun, joka on huonoimmassakin tilanteessa pituudeltaan korkeintaan kaksinkertainen verrattuna oikeaan ratkaisuun.

> *Valitaan solmu x_1 ja sitä lähinnä oleva solmu x_2 ja asetetaan $h = (x_1, x_2, x_1)$. Toistetaan, kunnes kaikki solmut ovat ketjussa h:*
>
> **Toista** Lisätään ketjuun yksi lähimpänä ketjua h oleva uusi solmu z sen solmun edelle, jota lähimpänä z on.

Tehtävä 2.1.12 Olkoon G painotettu verkko etäisyysmatriisina

$$M_{G,W} = \begin{pmatrix} \infty & 3 & 3 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & \infty & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & \infty & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & \infty & 5 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 5 & \infty & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 5 & 4 & \infty \end{pmatrix}$$

Piirrä verkko mahdollisimman hyvin niin, että etäisyydet pitävät paikkansa. Selvitä toteuttaako verkko edellä vaaditun kolmioepäyhtälön: __________

Esimerkki 2.1.13 Sovelletaan "quick"-algoritmia Tehtävän 2.1.12 verkkoon G. Olkoot solmut nimeltään $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Valitaan

$$h_2 := (1, 4, 1).$$

Näitä solmuja lähinnä on solmu 3, jota lähinnä on 4:

$$h_3 := (1, 3, 4, 1).$$

Jatkossa on hieman valinnan varaa: Edellisiä lähinnä on kaksi solmua, 2 ja 6. Valitaan näistä 2, joka on lähimpänä ketjun solmua 3:

$$h_4 := (1, 2, 3, 4, 1).$$

Solmu 6 on lähimpänä ketjua h_4:

$$h_5 := (1, 2, 3, 4, 6, 1).$$

Solmu 5 on lähinnä solmua 6:

$$h_6 := (1, 2, 3, 4, 5, 6, 1).$$

Ratkaisun pituus on 19, kun lyhin olisi 18 (mikä se on?). Aloittamalla jostain muusta solmusta tai tekemällä äskeiset valinnat toisin saataisiin erilaisia arvioita.

2.1.4 Lyhimmät ketjut

Olkoon G yksinkertainen yhtenäinen painotettu verkko.

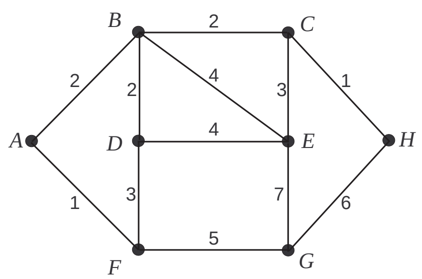
Ongelma Etsi verkon kahta solmua x ja y yhdistävistä ketjuista lyhin.

Alkeellisin ja samalla tehottomin menetelmä on etsiä kaikki ketjut $x \to y$ ja valita näistä lyhin.
Huomattavasti parempi, mutta myös hieman hankalammin käsiteltävä menetelmä on *E. Dijkstran* vuonna 1959 esittämä algoritmi, jolla haluttaessa saadaan myös lyhimmät ketjut solmusta x kaikkiin muihin solmuihin *virittävän puun* muodossa (ks. Luku 1.5):

> *Olkoon H aluksi verkko, jossa on vain lähtösolmu x. Lähdetään kasvattamaan verkkoa H yksi solmu kerrallaan toistamalla seuraavaa prosessia, kunnes solmu y (tai kaikki solmut) ovat verkossa H:*
>
> **Toista** Etsitään sellainen verkkoon H kuulumaton solmu, johon on lyhin matka lähtösolmusta x verkossa H. Lisätään tämä solmu ja kaari verkkoon H.

On selvää, että näin syntyneessä verkossa H jokaista solmuparia $x \neq z$ yhdistää täsmälleen yksi ketju. On myös melko ilmeistä, että kaikki muut ketjut verkossa G ovat ainakin yhtä pitkiä.

Tehtävä 2.1.14 Etsi lyhimmät ketjut Kuvan 8 verkon solmusta A muihin solmuihin.



Kuva 8: Tehtävän 2.1.14 painotettu verkko

Jos halutaan tietää vain kaikkien solmuparien välisten lyhimpien ketjujen *pituudet*, voidaan käyttää *Floydin* algoritmia. Olkoon $D = (d_{ij})_{n\times n}$ verkon

G etäisyysmatriisi. Matriisi D ilmaisee tällöin solmujen välisten *yhden kaaren pituisten ketjujen* pituudet. Floydin algoritmissa matriisia D muunnetaan n kertaa niin, että kussakin vaiheessa p saadaan matriisiin lyhimmän *enintään p kaarta* sisältävän ketjun pituus:

for $k = 1 : n$
  for $i = 1 : n$
    for $j = 1 : n$
      if $(D(i,k) + D(k,j) < D(i,j))$
        $D(i,j) = D(i,k) + D(k,j);$
      end
    end
  end
end

Esimerkki 2.1.15 Esimerkin 1.4.2 tapauksessa etäisyysmatriisista saadaan Floydin menetelmällä lyhimpien ketjujen pituudet

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 8 & 6 \\ 5 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tehtävä 2.1.16 Laske Tehtävän 2.1.14 lyhimpien ketjujen pituudet.

2.2 Minimaalinen virittävä puu

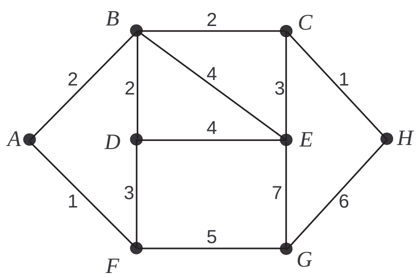
Painotetun yhtenäisen verkon virittävä puu, jossa kaaripainojen summa on mahdollisimman pieni, on nimeltään *minimaalinen* (tai myös *halvin*) virittävä puu (*minimal, cheapest, economy tree*). Huomaa, että painotetusta yhtenäisestä verkosta löydetään Dijkstran algoritmilla (ks. Luku 2.1.4) sivutuotteena eräs virittävä puu, jolla on juurena annettu solmu, mutta tämä suinkaan aina ole minimaalinen.

2.2.1 Primin algoritmi

Halvimman virittävän puun etsimiseen kelpaa järjestelmällisesti puuta kasvattava *Primin algoritmi*, joka toimii seuraavasti:

> *Lähtöpuuksi valitaan halvin kaari päätesolmuineen. Toistetaan, kunnes kaikki solmut ovat puussa:*
>
> **Toista** Lisätään puuhun halvin niistä puuhun liittyvistä kaarista, joiden toinen pää ei vielä ole puussa, sekä kyseinen solmu.

Tehtävä 2.2.1 Etsi Primin algoritmilla halvin virittävä puu Kuvan 9 verkosta.



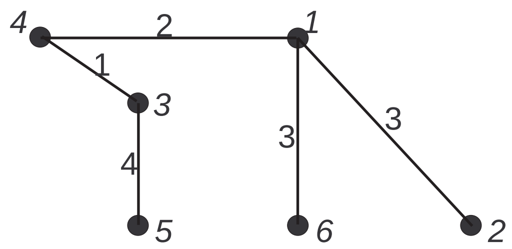
Kuva 9: Tehtävän 2.2.1 painotettu verkko

Esimerkki 2.2.2 Esimerkille 2.1.12 saadaan Primin menetelmällä virittävä puu (Kuva 10), jonka kaarten painojen summa on 13 yksikköä.
Onko muitakin yhtä halpoja? ____________________

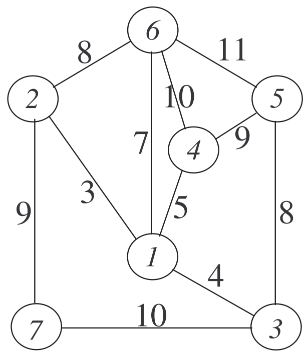
Tehtävä 2.2.3 Rakenna Kuvan 11 painotetulle verkolle

a) halvin virittävä puu Primin algoritmilla. ________________

b) virittävä puu Dijkstran algoritmilla alkaen solmusta 4. ________



Kuva 10: Virittävä puu Esimerkkiin 2.2.2



Kuva 11: Tehtävän 2.2.3 painotettu verkko

2.2.2 Kruskalin algoritmi

Jos yhtenäisessä painotetussa verkossa on vähänlaisesti kaaria, kannattaa käyttää nk. *ahneisiin* (*greedy*) algoritmeihin luokiteltavaa *Kruskalin algoritmia*, jonka lapsikin hoksaa, kunhan ymmärtää puun vaatimukset. Kruskalin menetelmä minimaalisen virittävän puun rakentamiseksi toimii Primin algoritmia suoraviivaisemmin kaarten ja solmujen valintojen suhteen. Siinä kasvatetaan aliverkkoa pitäen huoli siitä, ettei synny syklejä. Puuksi se saattaa muuttua vasta aivan lopussa:

> *Valitaan halvin kaari päätesolmuineen. Toistetaan, kunnes kaikki solmut ovat mukana:*
>
> **Toista** Otetaan aliverkkoon sellainen seuraavaksi halvin kaari päätesolmuineen, ettei synny sykliä.

Tehtävä 2.2.4 Etsi Kruskalin algoritmilla halvin virittävä puu Kuvan 9 verkosta.

Tehtävä 2.2.5 Rakenna Kuvan 11 painotetulle verkolle minimaalinen virittävä puu Kruskalin algoritmilla.

Tehtävä 2.2.6 Keksi pienin mahdollinen kaaripainoilla varustettu painotettu verkko, jossa Primin algoritmi ja Kruskalin algoritmi antavat varmasti erilaisen tuloksen. Missä määrin tulos voikaan olla erilainen?

2.3 Verkkojen isomorfisuudesta

Kahta suuntaamatonta verkkoa G ja H sanotaan *isomorfisiksi*, jos verkko G saadaan verkosta H sopivalla solmujen ja kaarten nimien muutoksella.
Yhteysmatriisien avulla ilmaistuna: jos H:n matriisista saadaan G:n matriisi järjestämällä H:n solmut sopivasti.
Yleisesti kahden verkon isomorfisuuden toteaminen on verrannollinen solmumäärän kertomaan, siis erittäin työlästä. Erikoista tyyppiä oleville verkoille, kuten puille ja tasoverkoille, on kehitetty nopeitakin menetelmiä.
Joskus voidaan *ei-isomorfisuus* todeta helpostikin käyttäen isomorfisuudesta seuraavia *välttämättömiä* ehtoja:
Kahdella äärellisellä isomorfisella verkolla $G = (\mathbf{X}, A, \Psi)$ ja $H = (\mathbf{Y}, B, \Gamma)$ on

a) sama määrä solmuja.

b) sama määrä kaaria.

c) sama määrä kunkin asteluvun omaavia solmuja.

d) samat määrät tietynpituisia (suljettuja) ketjuja tai polkuja.

e) sama määrä yhtenäisiä ja vahvasti yhtenäisiä komponentteja,

ja jokaista verkon G komponenttia vastaa sen kanssa verkkona isomorfinen verkon H komponentti, joille pätevät kohdat a) – d).
Nämä ominaisuudet *eivät todista isomorfisuutta!*

Tehtävä 2.3.1 Ovatko seuraavat verkot isomorfisia?

Esimerkki 2.3.2 Osoita, että verkot G ja H ovat isomorfisia, kun

$$M_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu. Olkoot $G = (\mathbf{X}, U, \Psi)$ ja $H = (\mathbf{Y}, V, \Gamma)$, missä

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \\ \mathbf{Y} &= \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\} \end{aligned}$$

Olkoot $M_G = (a_{ij})_{5\times 5}$ ja $M_H = (b_{ij})_{5\times 5}$. Yritetään muodostaa bijektio $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ käyttäen isomorfisuudelle välttämättömiä ehtoja.
Koska $a_{13} = b_{24} = 3$, on valittava $f(x_1) = y_2$ ja $f(x_3) = y_4$.
Koska solmut x_4 ja y_5 ovat ainoita, joiden lähtöaste on 1, täytyy olla $f(x_4) = y_5$.
Koska $(x_4, x_5) \in U$, on oltava

$$(f(x_4), f(x_5)) = (y_5, f(x_5)) \in V,$$

joten pitää valita $f(x_5) = y_3$. Lopuksi olkoon $f(x_2) = y_1$.
Järjestämällä funktion f mukaan saadaan

$$M'_H = \begin{array}{c c} H & \begin{array}{ccccc} y_2 & y_1 & y_4 & y_5 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_2 \\ y_1 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

mistä nähdään, että verkot ovat isomorfiset.

2.4 Taso- vai avaruusverkko?

Suuntaamaton verkko G on *tasoverkko* eli *planaarinen*, jos se on esitettävissä tasokaaviona niin, etteivät kaaret leikkaa toisiaan, muutoin se on *avaruusverkko*.

Ongelma Miten selvitetään, onko annettu verkko planaarinen?

Ratkaisu on teoreettisesti yksinkertainen mutta – kuten monet muutkin verkko-ongelmat – käytännössä hidas toteuttaa. Vaikka verkko onnistuttaisiinkin todistamaan tasoverkoksi, jää yleensä vielä selvitettäväksi, miten se on tasoon piirrettävä.
Seuraavaa lausetta käytetään usein osoitettaessa verkkoa avaruusverkoksi:

Lause 2.4.1 (Eulerin kaava verkoille) Olkoon G äärellinen yhtenäinen tasoverkko, jossa on n solmua ja m kaarta. Jos G jakaa tason r alueeseen, niin

$$n - m + r = 2.$$

Seuraus 2.4.2 Jos G on äärellinen yhtenäinen yksinkertainen tasoverkko, jossa on $n \geq 3$ solmua ja m kaarta, niin

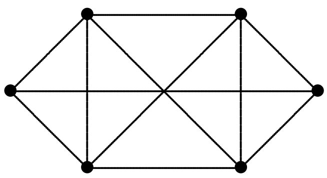
$$m \leq 3n - 6.$$

Huomautus 2.4.3 Jos verkko on tasoverkko, sitä voidaan muuntaa planaarisuuden kärsimättä seuraavasti:

1. Poistetaan silmukat ja rinnakkaiset kaaret.
2. Poistetaan 2-asteinen solmu ja yhdistetään siihen liittyneet kaaret.
3. Kaari ”kutistetaan” pisteeksi, jolloin kaaren päät yhtyvät yhdeksi solmuksi.

Avaruusverkko puolestaan säilyy avaruusverkkona, jos sitä muunnetaan kohtien 1 ja 2 keinoin, mutta kohta 3 saattaa muuttaa sen planaariseksi.
Verkon yksinkertaisuus saatetaan tapauksissa 2 tai 3 menettää.

Esimerkki 2.4.4 Onko seuraava verkko G tasoverkko?



Ratkaisu. Verkko on yksinkertainen ja siinä on 6 solmua ja 11 kaarta, joten pätee $11 < 3 \cdot 6 - 6 = 12$, mikä ei ole planaarisuuden kanssa ristiriidassa. Kutistetaan pisin vaakasuora kaari. Muunnettu verkko G' on yksinkertainen ja siinä on 5 solmua ja 10 kaarta, joten $10 > 3 \cdot 5 - 6 = 9$. Seurauksen 2.4.2 nojalla verkko G' ei ole tasoverkko, joten myöskään G ei ole.

Esimerkki 2.4.5 Äärellisiä avaruusverkkoja on olemassa ainakin kaksi, Kuratowskin verkot K_5 ja $K_{3,3}$ (ks. Tehtävä 1.2.6).
Edellinen on yksinkertainen täydellinen 5-solmuinen verkko ja jälkimmäinen nk. *täydellinen kaksijakoinen* (*complete bipartite*) $(3+3)$-solmuinen verkko.

Itse asiassa nämä ovat *olennaisesti ainoat äärelliset avaruusverkot*:

Lause 2.4.6 (Kuratowskin lause). Äärellinen verkko on tasoverkko jos ja vain jos se ei sisällä yhtään sellaista aliverkkoa, joka voidaan muuntaa Huomautuksen 2.4.3 keinoin 1 ja 2 (ei 3) verkoksi, joka on isomorfinen Kuratowskin verkon K_5 tai $K_{3,3}$ kanssa.

Tehtävä 2.4.7 Mitkä seuraavista verkoista ovat planaarisia?

KUVAT

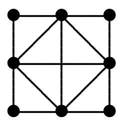
2.5 Kartan väritys

Olkoon G eräs valtioiden rajoja kuvaava tasokartta. Valtiot oletetaan yhtenäisiksi alueiksi ja rajanaapuruus tarkoittaa, että valtioilla on yhteistä rajaa enemmän kuin yksittäisten pisteiden verran.

> *Kartanväritysongelma.* Kuinka monta eri väriä tarvitaan kartan värittämisessä, kun rajanaapureilla on oltava eri värit, ts. mikä on kartan *kromaattinen luku* γ?

Probleema verkkoteorian kielellä:
valtiot = solmut $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$,
rajanaapuruus merkitsee kaarta $\langle x_i, x_j \rangle$:
Montako väriä γ riittää väritettäessä solmut niin, etteivät vierekkäiset ole samanvärisiä?
Aikojen myötä on esitetty lukuisa joukko osatuloksia tietyn tyyppisille verkoille sekä yleisiä tuloksia $\gamma \leq 6$, $\gamma \leq 5$.
On myös kauan tiedetty, että joillekin tasoverkoille $\gamma = 4$.

Esimerkki 2.5.1 Montako väriä tarvitaan oheisen kartan värittämiseen?

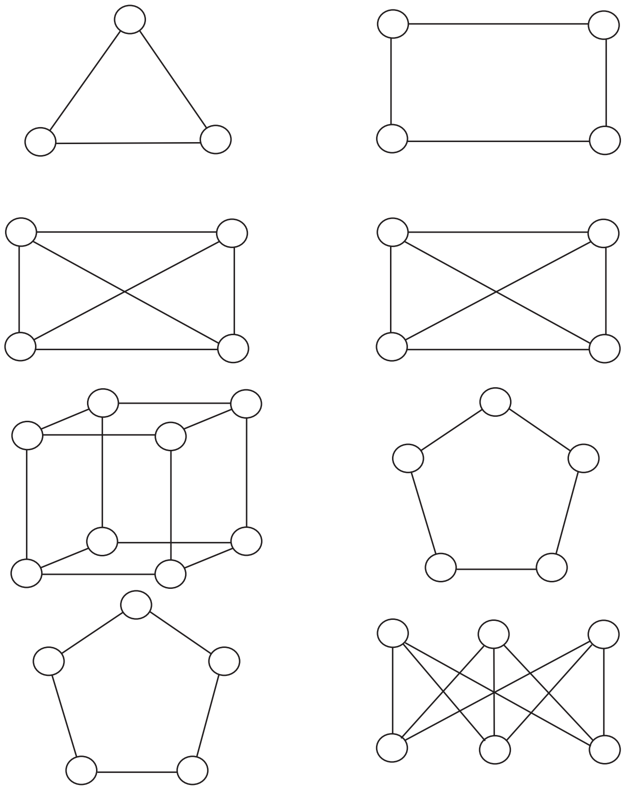


Ratkaisu. 3 väriä ei riitä, sillä sisemmän täydellisen nelisolmuisen aliverkon värittämiseen tarvitaan 4. Toisaalta 4 värillä tehtävä väritys onnistuu helposti. Siis kromaattinen luku on 4.

Kuuluisan *neliväriväittämän* todistukseen, joka perustuu oleellisesti tietokoneen käyttöön, kului aikaa 4 vuotta ja yli 1200 tietokonetuntia.

Lause 2.5.2 (Appel ja Haken, 1976). Tasoverkon kromaattinen luku $\gamma \leq 4$.

Tehtävä 2.5.3 Määritä seuraavien verkkojen kromaattiset luvut:



Tehtävä 2.5.4 Mitkä Tehtävien 2.5.3 ja 2.4.7 verkoista ovat Eulerin, mitkä Hamiltonin verkkoja?