Topologia
Syksy 2010
Harjoitus 10

(1) Olkoon X joukko ja (Y, d) metrinen. Olkoon F kaikkien rajoitettujen kuvausten $f : X \to Y$ joukko. Oletetaan tiedetyksi (vertaa harj. 8 teht. 3), että

$$d_1(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

on metriikka F:ssä. Osoita, että F on täydellinen, jos Y on täydellinen.

* * *

Eli joukko F metriikan d_1 määräämällä topologialla on täydellinen; eli jokainen Cauchyn jono suppenee.

Olkoon $f_i \in F$ Cauchyn jono, so $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, n_0$ s.e. $d_1(f_i, f_j) < \epsilon$ kun $i, j > n_0$.

Siis

$$d_1(f_i, f_j) = \sup\{d(f_i(x), f_j(x)) \mid x \in X\} < \epsilon,$$

eli erityisesti $f_i(x)$ on Cauchyn jono jokaisella "fiksatulla" $x \in X$. Koska (Y, d) on täydellinen, niin $f_i(x)$ suppenee jokaisella $x \in X$ kohti jotain arvoa jota voidaan merkitä $f(x)$, joten f_i suppenee kohti näin määriteltyä funktiota f F:ssä.

(2) Avaruuden X osajoukko A on *harva*, jos $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$, ja *laiha*, jos se on numeroituva yhdiste harvoista joukoista.

(a) Anna esimerkki laihasta joukosta $A \subset \mathbb{R}^1$, joka ei ole harva.

(b) Osoita, että laihojen joukkojen numeroituva yhdiste on laiha.

* * *

(a) Esim. $\mathbb{Q}$ on numeroituva yhdiste yksittäisten rationaalilukujen yksiöistä; jokainen $\{q\}$, $q \in \mathbb{Q}$ on selvästi harva sillä

$$\operatorname{int} \overline{\{q\}} = \operatorname{int}\{q\} = \emptyset,$$

kun taas

$$\operatorname{int} \overline{\mathbb{Q}} = \operatorname{int} \mathbb{R} = \mathbb{R} \neq \emptyset.$$

(b) Olkoon $A_i \in X$ laihoja; so. $A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_i^j$ joillekin harvoille joukoille A_i^j. Mutta $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_i^j$ on edelleen numeroituva yhdiste!

(3) Osoita, että jos X on täydellinen metrinen avaruus ja $A \subset X$ laiha, niin $\operatorname{int} A = \emptyset$.

* * *

A on laiha, eli se on numeroituva yhdiste joukoista A_i, joille $\operatorname{int} \overline{A_i} = \emptyset$.

Bairen lauseen toinen muoto on: Jos X on täydellinen metrinen avaruus ja F_i ovat suljettuja joukkoja joilla ei ole sisäpisteitä, niin niiden yhdisteellä ei ole sisäpisteitä.

Näin ollen joukolla $\bigcup \overline{A_i}$ ei ole sisäpisteitä, joten sen osajoukolla $A = \bigcup A_i$ ei myöskään ole sisäpisteitä.

(4) Osoita että irrationaalilukujen joukko $\mathbb{R}^1$:ssä on G_δ, mutta ei ole F_σ.

* * *

Tämä ei välttämättä auta lukijaa, ja päätellen harjoituksissa jaetusta virheellisestä malliratkaisusta ei myöskään auttanut malliratkaisun laatijaa, mutta G_δ, avoimien joukkojen leikkaus, on nimetty näin koska saksaksi *Gebiet* tarkoittaa aluetta tai pinta-alaa eli tässä tapauksessa avointa joukkoa, ja delta on kuin *Durchschnitt*, leikkaus. Koska ihmisten tekemä matematiikka on tällaista, F_σ-joukot, suljettujen joukkojen yhdisteet, on nimetty ranskan sanojen *fermé* (suljettu) ja *somme* (summa, yhdiste) mukaan.

Siis: G_δ on avoimien joukkojen leikkaus, F_σ suljettujen joukkojen yhdiste. Harjoitusten lapussa olivat alaindeksit oikein, mutta F ja G olivat vaihtaneet paikkaa.

Sitten itse tehtävään.

* * *

Eli näytä että $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on numeroituva leikkaus avoimista joukoista, mutta ei ole numeroituva yhdiste suljetuista joukoista.

Jos $q \in \mathbb{Q}$, niin

$$\mathbb{R} \setminus \{q\} = (-\infty, q) \cup (q, \infty)$$

on avoin joukko. Koska rationaaliluvut ovat numeroituva joukko, niin leikkaus

$$\bigcap_{q \in \mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{q\})$$

on numeroituva. Tämä numeroituva avointen joukkojen leikkaus sisältää luvun jos ja vain jos se on irrationaaliluku; siispä irrationaaliluvut ovat tyyppiä G_δ.

Tämä oli tehtävän helpompi puoli; sitten se vaikeampi.

Oletetaan että irrationaaliluvut ovat F_σ-joukko. Tällöin ovat olemassa suljetut joukot F_i siten, että

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

Tällöin joukko-opillisella ju-jitsulla välittömästi nähdään että

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus F_i),$$

eli rationaaliluvut ovat numeroituva leikkaus avoimista joukoista, eli G_δ-joukko. Koska rationaaliluvut ovat tiheässä reaalilukujen joukossa, niin jokaisen avoimen joukon $\mathbb{R} \setminus F_i$ täytyy olla tiheä reaalilukujen joukossa.[1]

Koska tiedetään että irrationaaliluvut ovat G_δ-joukko (se todistettiin tämän tehtävän alussa) ja ovat tiheässä reaalilukujen joukossa, niin on olemassa numeroituva jono avoimia joukkoja G_i siten, että niiden leikkaus on irrationaalilukujen joukko ja jokainen avoin G_i on tiheä reaalilukujen joukossa.

Koska joukot $\mathbb{R} \setminus F_i$ ja G_i ovat avoimia, reaalilukujen joukossa tiheitä joukkoja, niin Bairen lauseen nojalla[2] niiden leikkaus on tiheä reaalilukujen joukossa. Koska tämä leikkaus on

$$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \emptyset,$$

on tämä selvästikin typerää ja mahdotonta, eli ristiriita. Koska tämä päättely lähti oletuksesta että irrationaaliluvut olisivat F_σ-joukko, niin näin ollen irrationaaliluvut *eivät* ole F_σ-joukko.

[1] Tiheä: luennoissa tiheys on määritelty niin, että A on tiheä X:ssä, jos $\overline{A} = X$. Koska $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ja $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \setminus F_i$, niin $\overline{\mathbb{R} \setminus F_i} = \mathbb{R}$.

[2] *Bairen lause.* Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja $G_1, G_2, \ldots$ jono X:n tiheitä avoimia joukkoja. Tällöin $G = \cap\{G_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ on tiheä.

Bairen lauseen detaljit: Onko leikkaus numeroituva? On, koska $\mathbb{R} \setminus F_i$ ja G_i kumpikin yksinään ovat numeroituvia; ottamalla vuorottain alkio kummastakin saadaan edelleen numeroituva määrä joukkoja. Ja onko reaalilukujen metrinen avaruus täydellinen? On se. Siis saa ja voi käyttää Bairen lausetta.