Topologia
Syksy 2010
Harjoitus 11

(1) Tarkastellaan tason (a,∞)-topologiaa. (Tässä topologiassa $A \subset \mathbb{R}^2$ on avoin jos ja vain jos $A = \emptyset$, $A = \mathbb{R}^2$ tai $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > a \text{ ja } y > b\}$ joillekin $a, b \in \mathbb{R}$.) Jokaiselle T-aksioomalle joko todista se todeksi, tai keksi ja piirrä vastaesimerkki.

$* * *$

Jos lukijan mielestä tehtävänannossa on jotain outoa, on hän täysin oikeassa; O. Toivasen kiireellä keksimän tehtävän "topologia" ei ole topologia! Jos kirjoitetaan

$$A_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > a \text{ ja } y > b\},$$

eli ilmaistaan yksi annetunlainen joukko lukujen a ja b eli pisteen (a,b) avulla, joka on kaikki mikä sen määräämiseksi tarvitaan, niin on selvää että esim. $A_{1,0} \cup A_{0,1}$ ei ole tätä muotoa oleva joukko. Kyseessä ei voi olla topologia koska se ei sisällä väitettyjen avointen joukkojensa yhdisteitä!

Jos O. Toivanen olisi kelannut monistetta taaksepäin tulotopologioita käsittelevään lukuun, olisi hän huomannut esim. tällaisen huomion: tulotopologian $X \times X$ *kannan* muodostavat joukot $U \times U$, missä $U \subset X$ on X:n topologiassa avoin. Annettu lukujoukko ei siis ole topologia, vaan vain sen kanta; topologia saadaan ottamalla joukkojen $A_{a,b}$ mielivaltaiset yhdisteet.

Tehdään tämä.

Jokainen joukko $A_{a,b}$ määräytyy täysin tuon pisteen (a,b) avulla, ja sisältää pisteet "joiden kumpikin koordinaatti on suurempi kuin pisteen (a,b) vastaava koordinaatti". Näiden joukkojen mielivaltaiset yhdisteet tuottavat joukkoja jotka voidaan ilmoittaa esim. seuraavalla tavalla:

$$A_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > f(x)\},$$

missä f on mv. vähenevä funktio joka on määritelty $\mathbb{R}$:ssä tai jollakin välillä (x_0,∞). (Arvolla $x = x_0$ joukolla A_f on "pystysuora reuna" joka ei kuulu joukkoon. Yhdisteestä riippuen samanlaisia "reunoja" tulee kaikkiin funktion f epäjatkuvuuskohtiin.) Avoimet joukot siis koostuvat "vähenevien funktioiden yläpuolisista osista".

Kaksi avoimien joukkojen erikoistyyppiä ovat avoimet puolitasot

$$A_{x_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > x_0\}$$

ja

$$A_{y_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > y_0\}$$

kaikille $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$; nämä saadaan kun toinen tulon avoin joukko on koko $\mathbb{R}$.

Nämä ovat siis avoimet joukot; suljetut joukot ovat niiden komplementit eli "ne pisteet jotka ovat vähenevän funktion kuvaajalla tai sen alla." (Ja tarkemmin, vähenevän funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tai $f : (x_0, \infty) \to \mathbb{R}$ kuvaajalla tai sen alla, plus ne kaikki pisteet (x, y) joille $x \leq x_0$.)

Surullista on että tällä oikealla topologialla tehtävän vastaus on sama kuin väitetyllä "topologialla", ja vastaesimerkitkin ovat olennaisesti samanlaisia; työtä vain on hieman enemmän.

* * *

Kerrataan T-aksioomat.

T_0 : jos $x, y \in X$, $x \neq y$, niin ainakin toisella pisteistä x ja y on ympäristö (sen sisältävä avoin joukko) johon toinen piste ei kuulu.

T_1 : jos $x, y \in X$, $x \neq y$, niin kummallakin pisteistä x ja y on ympäristö (sen sisältävä avoin joukko) johon toinen piste ei kuulu.

T_2 : jos $x, y \in X$, $x \neq y$, niin kummallakin pisteistä x ja y on ympäristö (sen sisältävä avoin joukko) johon toinen piste ei kuulu, siten että näiden ympäristöt ovat erillisiä (niiden leikkaus on tyhjä).

T_3 : jos $x \in X$ ja $A \subset X$ on suljettu, $x \notin A$, niin x:llä ja A:lla on erilliset ympäristöt.

T_4 : jos $A, B \subset X$ ovat erillisiä suljettuja joukkoja, niin niillä on erilliset ympäristöt.

* * *

Tason (a, ∞)-topologia on T_0, ja ei ole T_1, T_2, T_3 tai T_4.

T_0 : Olkoon $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ siten, että $(a, b) \neq (c, d)$. Tällöin joko koordinaatit a ja c ovat erisuuria tai koordinaatit b ja d ovat erisuuria. Voidaan olettaa että $a > c$. Tällöin avoin joukko

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > (a + c)/2 \text{ ja } y > b - 1\}$$

sisältää pisteen (a, b), mutta ei sisällä pistettä (c, d). Siispä topologia on T_0.

T_1 : Tarkastellaan pisteitä $(0,0)$ ja $(0,1)$. Jos $(0,0)$ kuuluu johonkin ympäristöön $A_{a,b}$,

$$A_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > a \text{ ja } y > b\},$$

niin jokainen $(0,x)$ jolle $x > 0$ kuuluu siihen koska $x > 0 > b$. Näin ollen ei ole ympäristöä joka sisältäisi pisteen $(0,0)$ mutta ei pistettä $(0,1)$.

T_2 : Sama vastaesimerkki käy.

T_3 : Suljettuja joukkoja ovat avointen joukkojen komplementit. Esimerkiksi koska

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ ja } y > 0\}$$

on avoin, niin

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \text{ tai } y \leq 0\}$$

on suljettu. Mutta ainoa tämän joukon sisältävä avoin joukko eli ainoa sen ympäristö on $\mathbb{R}^2$. Tällöin esimerkiksi pisteellä $(1,1) \notin C$ ei ole ympäristöä joka ei leikkaisi tätä ainoaa C:n ympäristöä.

T_4 : Ominaisuus T_4 on, että erillisillä suljetuilla joukoilla on erilliset ympäristöt; mutta onko avaruudessa erillisiä suljettuja joukkoja? Ei montaa. Osoitetaan ensin, että jos C ja D ovat suljettuja, *epätyhjiä* joukkoja niin ne eivät voi olla erillisiä.

Jos C ja D ovat suljettuja joukkoja niin jollekin riittävän suurelle $n \in \mathbb{N}$ pätee, että $(-n,-n) \in C \cap D$. Näin siksi, että C ja D ovat suljettuina joukkoina vähenevien funktioiden $f : (x_0, \infty) \to \mathbb{R}$ alapuolisia alueita, mutta sisältävät myös kaikki pisteet joiden x-koordinaatti on x_0 tai pienempi; valitsemalla n niin että $-n < x_0$ kummallakin luvulla x_0 saadaan $(-n,-n) \in C \cap D$.

Jos toinen funktio on $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, niin siltikin löytyy tällainen n, sillä f on vähenevä, ja pisteet $(-n,-n)$ ovat "aidosti kasvava jono". Jos taas esim. C on jonkinlainen alempi puolitaso rajasuorana $y = y_0$, niin valitsemalla n siten, että $-n < y_0$ saadaan $(-n,-n) \in C$, ja $(-n,-n) \in D$ kuten yllä.

Tarkoittaako tämä sitä, että erillisiä suljettuja joukkoja ei ole? Ei aivan.

Olkoon $C = \emptyset$ ja D epätyhjä suljettu joukko. Tällöin C ja D ovat erillisiä, sillä $C \cap D = \emptyset$. Joukolla C on aina avoin ympäristö $\emptyset$, ja joukolla D on aina avoin ympäristö

$\mathbb{R}^2$. Koska $\emptyset \cap \mathbb{R}^2 = \emptyset$, ovat nämä erilliset ympäristöt; näin ollen, koska nämä ovat ainoat mahdolliset erilliset suljetut joukot, on tämä avaruus T_4.

(2) Todista: Jos X on T_0 ja T_3, niin X on säännöllinen.

* * *

Säänöllinen avaruus on T_3 ja T_1, joten pitää osoittaa että (T_0 ja T_3) $\Rightarrow T_1$.

Olkoon $x, y \in X$, $x \neq y$. Olkoon x näistä se piste jolla on T_0:n nojalla ympäristö A joka ei sisällä pistettä y. Tällöin A:n komplementti $\complement A$ on suljettu, ja sisältää y:n. Koska joukon sulkeuma on pienin sen sisältävä suljettu joukko, niin $\overline{\{y\}} \subset \complement A$. Koska $x \notin \complement A$ niin $x \notin \overline{\{y\}}$. Koska avaruus X on T_3, niin pisteellä x ja suljetulla joukolla $\overline{\{y\}}$, $x \notin \overline{\{y\}}$, on erilliset ympäristöt, ja koska $y \in \overline{\{y\}}$, niin näistä jälkimmäinen on myös pisteen y ympäristö.

(3) Todista: Ominaisuus T_2 on perinnöllinen, eli jos avaruus (X, T) on T_2 ja $A \subset X$, niin $(A, T\mid_A)$ on T_2.

* * *

Ominaisuus T_2 avaruudelle (X, T) on se, että jos $x, y \in X$, $x \neq y$, niin ovat olemassa $B, C \in T$ siten, että $x \in B$, $y \in C$ ja $B \cap C = \emptyset$. Jos nyt $A \subset X$ ja $x, y \in A$, $x \neq y$, niin $x, y \in X$, ja ovat olemassa B, C kuten yllä. Koska $B \cap C = \emptyset$, niin $(A \cap B) \cap (A \cap C) = \emptyset$; ja koska $A \cap B, A \cap C \in T\mid_A$ niin väite on todistettu.

(4) Olkoon $f, g : X \to Y$ jatkuvia, Y Hausdorff, $A \subset X$ tiheä, ja $f\mid_A = g$. Osoita, että $f = g$.

(Vihje. Oleta että on olemassa x s.e. $f(x) \neq g(x)$.)

* * *

Avaruus Y on Hausdorff, eli se on T_2, eli jos $f(x), g(x) \in Y$, $f(x) \neq g(x)$, niin ovat olemassa avoimet joukot Y_1, Y_2 siten, että $f(x) \in Y_1$, $g(x) \in Y_2$, ja $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$.

Oletetaan että on olemassa $x \in X$ siten, että $f(x) \neq g(x)$. Tällöin yo. avoimet joukot Y_1, Y_2 ovat olemassa. Koska f, g ovat jatkuvia ovat näiden avoimien joukkojen alkukuvat avoimia, eli $f^{-1}(Y_1)$ ja $g^{-1}(Y_2)$ ovat avoimia. Erityisesti niiden leikkaus on avoin; merkitään

$$D = f^{-1}(Y_1) \cap g^{-1}(Y_2).$$

Koska A on tiheä X:ssä, se leikkaa jokaisen avoimen joukon, ja erityisesti joukon D. Tällöin on olemassa piste $y \in A \cap D$, jolle $f(y) = g(y)$ (koska se on joukossa A), ja jolle $f(y)$ ja $g(y)$ kuuluvat erillisiin joukkoihin Y_1 ja Y_2. Tämä on selvä ristiriita.