Topologia
Syksy 2010
Harjoitus 12

---

(1) Todista: Ominaisuus N_2 on perinnöllinen.

* * *

Avaruus on N_2 jos sillä on numeroituva kanta.

Lyhyt todistus: Jos X_i on avaruuden (X, T) kanta ja $A \subset X$, niin $A \cap X_i$ on avaruuden $(A, T\mid_A)$ kanta. Jos ensimmäinen on numeroituva, niin toinenkin on.

Pitkä todistus: Oletetaan että avaruudella (X, T) on numeroituva kanta $X_i \subset X$, $i = 1, 2, \ldots$, eli jos $B \in T$, se voidaan esittää joidenkin joukkojen X_i yhdisteinä jonkin (numeroituvan) indeksin $I \subset \mathbb{N}$ yli:

$$B = \bigcup_{i \in I} X_i.$$

Jos nyt $A \subset X$ ja $C \in T\mid_A$, niin C on joukon A ja jonkin T-avoimen joukon leikkaus; joten jollekin joukolle $B \in T$ pätee

$$C = A \cap B = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap X_i),$$

joten selvästikin joukot $A \cap X_i$ ovat numeroituva topologian $T\mid_A$ kanta.

(2) Onko $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ separoituva?

* * *

On se. Avaruus on separoituva, jos se sisältää numeroituvan tiheän pistejoukon. Olkoon $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kiinteä; voidaan valita esim. $z = \sqrt{2}$. Jos $q \in \mathbb{Q}$, niin[1] $z + q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ja

$$Z = \{z + q \mid q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

on numeroituva (koska rationaaliluvut ovat numeroituva joukko) ja tiheä joukossa $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (koska rationaaliluvut ovat tiheässä jopa reaalilukujen joukossa).

[1] Olkoon $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja $q \in \mathbb{Q}$. Tällöin $s = z + q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sillä jos $s \in \mathbb{Q}$, niin $z = s - q$ olisi kahden rationaaliluvun erotuksena rationaaliluku.

(3) Olkoon X separoituva ja $\underline{A}$ kokoelma X:n erillisiä avoimia osajoukkoja. Osoita että $\underline{A}$ on numeroituva.

* * *

X on separoituva, eli on olemassa numeroituva joukko $Q \subset X$ joka on tiheä. Tällöin jokaiselle $A \in \underline{A}$ on olemassa piste $q \in Q$ siten, että $q \in A$. (Q on tiheä $\Leftrightarrow$ jokainen ei-tyhjä avoin joukko kohtaa Q:n.) Koska A ovat erillisiä, nämä pisteet ovat erillisiä; erityisesti jos $\underline{A}$ on numeroituva/ylinumeroituva niin pisteiden q joukko on numeroituva/ylinumeroituva.

Oletetaan että $\underline{A}$ ei ole numeroituva. Tällöin se on ylinumeroituva, jolloin pisteiden q joukko on ylinumeroituva; mutta ei numeroituvasta joukosta Q voi ottaa ylinumeroituvaa osajoukkoa!

(4) Sanotaan että avaruus on *numeroituvasti kompakti* (*countably compact*) jos sen jokaisella *numeroituvalla* avoimella peitteellä on äärellinen osapeite. Osoita että Lindelöf-avaruus on kompakti jos ja vain jos se on numeroituvasti kompakti.

* * *

Avaruus on Lindelöf, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on numeroituva osapeite.

Avaruus on kompakti, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

Avaruus on num.komp., jos sen jokaisella numeroituvalla avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

"$\Rightarrow$" : Triviaalia, vanhemmasta seuraa heikompi.

"$\Leftarrow$" : Olkoon A avoin peite. Tällöin (Lindelöf) sillä on numeroituva osapeite. Tällöin (num.kompt.) tällä osapeitteellä on äärellinen osapeite.

(Tällaisessa todistuksessa ei edes tarvitse ajatella sitä millainen matemaattinen objekti "peite" on; mutta muistetaan kuitenkin myöhempää käyttöä varten että jonkin joukon peite on sellainen joukkokokoelma jonka yhdiste sisältää tuon joukon.)

Loppu!