Topologia
Syksy 2010
Harjoitus 1

---

(1) Olkoon X joukko ja $(T_j)_{j\in J}$ perhe X:n topologioita. Osoita, että $T = \bigcap\{T_j : j \in J\}$ on X:n topologia.

(2) Todista: Välit $[a, b)$ muodostavat $\mathbb{R}^1$:n erään topologian kannan.

(3) Osoita, että Tehtävän 2 topologiassa jokainen $[a, b)$ on avoin ja suljettu.

(4) Osoita, että joukot $\emptyset$, $\mathbb{R}^1$ ja $(a, \infty), a \in \mathbb{R}^1$, muodostavat $\mathbb{R}^1$:n erään topologian T_1. Mikä on $\overline{\{0\}}$?

(5) Olkoon T niiden $U \subset \mathbb{R}^1$ kokoelma, joilla $U = \emptyset$ tai $\mathbb{R}^1 \setminus U$ on numeroituva. Osoita, että T on $\mathbb{R}^1$:n topologia.

Vastauksia

(1) Olkoon X joukko ja $(T_j)_{j\in J}$ perhe X:n topologioita. Osoita, että $T = \bigcap\{T_j : j \in J\}$ on X:n topologia.

* * *

Sen näyttämiseksi että T on topologia tulee osoittaa seuraavat kolme ehtoa:

1. T sisältää jäsentensä mielivaltaiset yhdisteet.
2. T sisältää jäsentensä äärelliset leikkaukset.
3. $\emptyset \in T$ ja $X \in T$.

(Huomaa nyt että T ja joukot T_j ovat *joukkoja*; T on joukko joka sisältää joukoille T_j yhteiset alkiot. Topologian ehtojen "jäsenet" eivät ole näitä joukkoja T_j, vain joukkoihin T_j kuuluvia alkioita so. topologioille T_j yhteisiä avoimia joukkoja. Esimerkiksi $T_1 = \{\emptyset, X, A, B, C, \ldots\}$, missä A, B, C ja niin edelleen ovat (topologian T_j mielessä) avoimia joukkoja. Jos A sattuu kuulumaan jokaiseen muuhunkin joukkoon T_j, niin sitten $A \in T$.)

Jos a_i on kokoelma T:hen kuuluvia joukkoja, niin jokainen a_i kuuluu jokaiseen joukkoon T_j. Koska jokainen joukko T_j on topologia, niin joukkojen a_i mielivaltaiset yhdisteet ja äärelliset leikkaukset kuuluvat jokaiseen joukkoon T_j. Näin ollen nämä yhdisteet ja leikkaukset kuuluvat myös joukkojen T_j leikkaukseen eli joukkoon T. Samoin, koska jokainen T_j on topologia, niin niistä jokainen sisältää joukot $\emptyset$ ja X, joten myös $T = \cap T_j$ sisältää ne.

(2) Todista: Välit $[a, b)$ muodostavat $\mathbb{R}^1$:n erään topologian kannan.

* * *

Ensimmäinen ratkaisutapa:

Tässä, kuten monissa muissakin matemaattisissa tehtävissä, ratkaisutapoja on monia, osa niistä helpompia, ja osa lyhyempiä. Eräs lyhyt ratkaisutapa on käyttää Kantakriteerio B:tä, jonka mukaan joukko on jonkin (sen tarkemmin määrittelemättömän) topologian kanta, jos (1) joukko on joukon X peite so. sen kaikkien joukkojen yhdiste on koko joukko (tässä tapauksessa $X = \mathbb{R}$); ja (2') jos U ja V kuuluvat väitettyyn kantaan ja niiden leikkaus on epätyhjä, niin $U \cap V$ kuuluu väitettyyn kantaan.

Ehto (1): Koska $\cup_{i=1}^{\infty}[-i, i) = \mathbb{R}$, välien $[a, b)$ joukko on reaaliakselin peite.

Ehto (2): Olkoon $[a, b)$ ja $[c, d)$ välejä siten, että $[a, b) \cap [c, d) \neq \emptyset$ ja $a \leq c$. Merkitään luvuista b ja d pienempää kirjaimella e. Tällöin $[a, b) \cap [c, d) = [c, e)$, joka on haluttua muotoa.

Huomaa että tässä ratkaisutavassa ei ratkaisijalle jää minkäänlaista käsitystä siitä millaisen topologian tämä kanta virittää.

Toinen ratkaisutapa:

Kokoelma joukkoja on tietyn topologian kanta, jos jokainen sen topologian alkio on tyhjä joukko tai voidaan ilmaista kannan joukkojen yhdisteenä. Koska ei tiedetä *minkä* topologian kannaksi välit $[a, b)$ pitäisi osoittaa, pitää katsoa millaisen joukon ne virittävät, ja osoittaa se topologiaksi. Tehtävä ei ole ”voidaanko kaikki tämän topologian avoimet joukot esittää kannan yhdisteinä?” vaan ”ovatko tämän kannan yhdisteet topologia?”

(Pidetään mielessä että $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid a \leq x < b\}$; se kuuluvatko päätepisteet joukkoon vaiko ei on seuraavassa hyvin tärkeää.)

Yhdistämällä joukkoja $[a, b)$ saadaan muotoa $\mathbb{R}^1$, $(-\infty, a)$, $[b, \infty)$, $[a, b)$, $\cup_i[a_i, b_i)$ ja $\cup_{i=1}^{\infty}[a + 1/i, b) = (a, b)$ olevia joukkoja; nämä ovat väitetyn kannan väitetysti määräämän topologian avoimet joukot. Kutsutaan niiden ja tyhjän joukon muodostamaa kokoelmaa nimellä

T. Näiden joukkojen yhdisteet ovat samaa muotoa; niiden leikkaukset samaten; joten nämä yhdisteet ja leikkaukset kuuluvat kokoelmaan T.

(Tarpeeton esimerkki: $[1, 3) \in T$ ja $[2, 4) \in T$. Nyt $[1, 3) \cap [2, 4) = [2, 3)$; leikkauksesta syntyy väli jonka päätepisteet ovat vaadittua tyyppiä. Samoin $[3, 4) \in T$, ja $[1, 3) \cup [3, 4) = [1, 4) \in T$.)

Koska $\cup_{i=1}^{\infty}[-i, i) = \mathbb{R}^1 \in T$ ja $\emptyset \in T$, on T topologia, ja välit $[a, b)$ näin ollen muodostavat erään reaaliakselin topologian kannan.

(Tarpeeton lisähuomautus: Koska tämä topologia sisältää joukot (a, b) ja niiden yhdisteet, se sisältää kaikki reaaliakselin "tavallisen" topologian avoimet joukot. Näin ollen tämä topologia on hienompi kuin tavallinen topologia.[1])

(3) Osoita, että Tehtävän 2 topologiassa jokainen $[a, b)$ on avoin ja suljettu.

* * *

Selvästikin jokainen joukko $[a, b)$ kuuluu topologiaan, so. on avoin joukko.

Joukko $[a, b)$ on puolestaan suljettu, jos sen komplementti on avoin. Joukon $[a, b)$ komplementti on $\mathbb{R}^1 \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$; mutta kuten edellisessä tehtävässä nähtiin, $(-\infty, a)$ ja $[b, \infty)$ kuuluvat topologiaan so. ovat avoimia joukkoja, joten niiden yhdistekin on avoin. Koska joukon $[a, b)$ komplementti on avoin, on $[a, b)$ suljettu.

Mikäli 2. tehtävän on ratkaissut esim. Kantakriteerio B:llä ja niin ollen ei tiedä millaisia joukkoja topologiaan kuuluu, voi yo. ratkaisussa huomata että jokainen kannan alkio kuuluu topologiaan eli on avoin joukko; ja koska

$$(-\infty, a) = [a - 1, a) \cup [a - 2, a - 1) \cup [a - 3, a - 2) \cup \ldots$$

ja

$$[b, \infty) = [b, b + 1) \cup [b + 1, b + 2) \cup [b + 2, b + 3) \cup \ldots,$$

voidaan joukon $[a, b)$ komplementti esittää kannan alkioiden yhdisteenä. Koska kannan alkioiden yhdisteet ovat topologian alkioita eli avoimia joukkoja, on tämä yhdiste avoin joukko, joten $[a, b)$ on suljettu.

(4) Osoita, että joukot $\emptyset$, $\mathbb{R}^1$ ja $(a, \infty), a \in \mathbb{R}^1$, muodostavat $\mathbb{R}^1$:n erään topologian T_1. Mikä on $\overline{\{0\}}$?

[1]Huomaa että tämä tarkoittaa että $T_{\text{tavallinen}} \subset T_{\text{tehtävän 2}}$; kyse ei ole termin "hieno" kansanomaisesta merkityksestä, so. "Voi että tämä on hieno topologia!"

* * *

Samat kolme todistettavaa kohtaa.

1. T_1 sisältää jäsentensä mielivaltaiset yhdisteet.

Joukkojen (a_i, ∞) yhdiste (yli jonkin indeksin $i = 1, 2, \ldots$) on tyyppiä (a, ∞) oleva joukko, sillä $\cup_i (a_i, \infty) = (\min_i a_i, \infty)$.

Huomaa että esimerkiksi yhdiste $\cup_{i=1}^{\infty}(-i, \infty) = \mathbb{R}^1$; tämä on "patologisessa mielessä" muotoa $(\min_i -i, \infty)$ oleva joukko.[2]

(Mikäli $\emptyset$ sisältyy yhdisteeseen tulos ei muutu; mikäli $\mathbb{R}^1$ sisältyy yhdisteeseen tulos on $\mathbb{R}^1 \in T_1$.)

2. T_1 sisältää jäsentensä äärelliset leikkaukset.

Joukkojen (a_i, ∞) leikkaus (yli jonkin äärellisen indeksin $i = 1, \ldots, n$) on tyyppiä (a, ∞) oleva joukko, sillä $\cap_{i=1}^{n}(a_i, \infty) = (\max_i a_i, \infty)$.

(Mikäli $\emptyset$ sisältyy yhdisteeseen tulos on $\emptyset \in T_1$; mikäli $\mathbb{R}^1$ sisältyy yhdisteeseen tulos ei muutu.)

3. $\emptyset \in T_1$ ja $X \in T_1$.

Selvä sen nojalla kuinka T_1 on määritelty.

Entä joukko $\overline{\{0\}}$? Joukon sulkeuma tarkoittaa nyt sulkeumaa tämän topologian mielessä. Joukon B sulkeuma voidaan määritellä esim. pienimpänä suljettuna joukkona joka sisältää B:n.

Koska T_1 sisältää kaikki avoimet joukot, jotka ovat nyt muotoa $\emptyset$, $\mathbb{R}^1$ tai (a, ∞), $a \in \mathbb{R}^1$, niin suljettuja joukkoja ovat näiden komplementit, $\mathbb{R}^1$, $\emptyset$ ja $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}^1$. Mikä näistä on pienin joukko joka sisältää joukon $\{0\}$? Ilmeisestikin $(-\infty, 0]$; näin ollen $\overline{\{0\}} = (-\infty, 0]$.

Vaihtoehtoisesti voidaan myös käyttää tätä sulkeuman määritelmää: "Joukon A sulkeuma on joukon A kosketuspisteiden joukko"; kosketuspisteet ovat niitä pisteitä joiden jokainen ympäristö sisältää jonkun A:n pisteen. Nyt $A = \{0\}$, pelkästään nollasta koostuva joukko. Koska ei-triviaalit avoimet joukot ovat nyt muotoa (a, ∞), $a \in \mathbb{R}^1$, niin nähdään että jos x on reaaliluku, niin jokainen x:n ympäristö sisältää kaikki sitä suuremmat luvut. Jos $x \leq 0$, jokainen x:n ympäristö sisältää nollan. Jos taas $x > 0$, niin esimerkiksi $(x/2, \infty)$ on x:n ympäristö joka ei sisällä nollaa. Näin ollen täsmälleen pisteet x joille $x \leq 0$ ovat joukon $\{0\}$ kosketuspisteitä, joten joukon $\{0\}$ sulkeuma on $(-\infty, 0]$.

[2] Mitä, tarkoittaako tämä että vastausten laatijalla on patologinen mieli? Ei toki, sillä tämä esimerkki tuli ilmi itse laskuharjoituksen aikana "pöydän toiselta puolelta". Jonka voisi myös tulkita tahallaan väärin, mutta siinä eksyttäisiin jo liiaksi asiasta.

(5) Olkoon T niiden $U \subset \mathbb{R}^1$ kokoelma, joilla $U = \emptyset$ tai $\mathbb{R}^1 \setminus U$ on numeroituva. Osoita, että T on $\mathbb{R}^1$:n topologia.

* * *

Suuri yllätys — samat kolme kohtaa. Pidetään mielessä että jos joukko on numeroituva, siinä on ”yhtä monta” alkiota kuin luonnollisissa luvuissa $\mathbb{N}$, tai vähemmän; so. siinä on äärellisen monta alkiota, tai sen alkiot voidaan laittaa jonoon (”ensimmäinen, toinen, kolmas, jne.”) ja näin luetella ne kaikki. Luonnolliset luvut $\mathbb{N}$, kokonaisluvut $\mathbb{Z}$ ja murtoluvut $\mathbb{Q}$ ovat numeroituvia. Reaaliluvut $\mathbb{R}$ ja kompleksiluvut $\mathbb{C}$ ovat ylinumeroituvia. Ylinumeroituvuus tarkoittaa että niitä ei voidaan ”laittaa jonoon” tällä lailla; niitä on liian paljon; tarkempi selitys Cantorin diagonaaliargumentin kera on ollut johdantokurssilla tai jollakin analyysin alkupään kurssilla.

Jos meillä on numeroituvia joukkoja, niin (a) niistä voidaan vähentää mielivaltaisen monta alkiota ja ne pysyvät edelleen numeroituvina; ja (b) äärellisen monta numeroituvaa joukkoa voidaan yhdistää ja tulos on edelleen numeroituva.

1. T sisältää jäsentensä mielivaltaiset yhdisteet.

Olkoon U_i joukkoja siten, että $\mathbb{R}^1 \setminus U_i$ on numeroituva jokaiselle i. Joukkojen U_i yhdisteen komplementti on $\mathbb{R}^1 \setminus \cup_i U_i = \cap_i(\mathbb{R}^1 \setminus U_i)$. Koska jokainen $\mathbb{R}^1 \setminus U_i$ on numeroituva, niin niiden leikkaus $\cap_i(\mathbb{R}^1 \setminus U_i)$ on myös numeroituva.

2. T sisältää jäsentensä äärelliset leikkaukset.

Olkoon U_i, $i = 1, \ldots, n$, joukkoja siten, että $\mathbb{R}^1 \setminus U_i$ on numeroituva jokaiselle i. Joukkojen U_i leikkauksen komplementti on $\mathbb{R}^1 \setminus \cap_i U_i = \cup_i(\mathbb{R}^1 \setminus U_i)$. Jokainen joukko $\mathbb{R}^1 \setminus U_i$ on numeroituva, ja niitä on äärellisen monta; näin ollen niiden yhdiste $\cup_i(\mathbb{R}^1 \setminus U_i)$ on myös numeroituva. (Jos $\mathbb{R} \setminus U_i = \{u_i^1, u_i^2, u_i^3, \ldots\}$, niin joukkojen $\mathbb{R}^1 \setminus U$ yhdiste voidan kirjoittaa $\{u_1^1, u_2^1, \ldots, u_n^1, u_1^2, u_2^2, \ldots\}$.)

3. $\emptyset \in T$ ja $X \in T$.

Tyhjä joukko $\emptyset \in T$ määritelmän nojalla; perusjoukon $\mathbb{R}^1$ komplementti on tyhjä joukko joka on numeroituva.