Topologia
Syksy 2010
Harjoitus 2, vastaukset

(1) Aseta seuraavat reaaliakselin $\mathbb{R}^1$ topologiat karkeusjärjestykseen.
$T_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}^1\}$
T_2 : kaikista $\mathbb{R}^1$:n osajoukoista muodostuva topologia
T_3 : reaaliakselin tavallinen topologia (eli avoimet välit (a, b) ja niiden yhdisteet)
T_4 : 1. harj. 2. teht. topologia

* * *

Topologia T_a on *karkeampi* kuin topologia T_b, ja T_b *hienompi* kuin T_a, mikäli $T_a \subset T_b$. Karkeampi topologia on "vähemmän tarkka työkalu" avaruuden mittaamiseen.

Tiedetään luennoista että T_1 on kaikkein karkein reaaliakselin topologia, ja T_2 kaikkein hienoin. Edellisten harjoitusten 2. tehtävässä huomattiin että topologia T_4 sisältää kaikki avoimet välit ja niiden yhdisteet; näin ollen $T_3 \subset T_4$.

Kokoamalla nämä palat yhteen saadaan seuraava sisäkkäisyys, karkein ensin ja hienoin viimeisimpänä: $T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_2$.

(2) Osoita kuvaus $f(x) = x$, $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, tavalliselta topologialta (a, ∞)-topologialle (harj. 1 teht. 4), jatkuvaksi.

* * *

Määritelmä ensin: Kuvaus $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ on jatkuva pisteessä $x \in X$, jos jokaiselle $f(x)$:n ympäristölle V, merkitään $V_{f(x)}$, $V_{f(x)} \in T_Y$, on olemassa $U_x \in T_X$ siten, että $f(U_x) \subset V_{f(x)}$.

Merkitään reaaliakselin (a, ∞)-topologiaa $T_{a,\infty}$,

$$T_{(a,\infty)} := \{\emptyset, \mathbb{R}^1\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}^1\},$$

ja reaaliakselin tavallista topologiaa $T_{\text{tavallinen}}$. Olkoon nyt $x \in \mathbb{R}^1$ mielivaltainen piste. Koska tyhjä joukko ei sisällä yhtään pistettä, ja koko joukko $\mathbb{R}^1$ kuvautuu itselleen, riittää tarkastella (a, ∞)-topologian avoimia joukkoja (a, ∞), $a \in \mathbb{R}^1$. Olkoon nyt $(a, \infty) \in T_{(a,\infty)}$ sellainen joukko, että $f(x) = x \in (a, \infty)$. Nyt esimerkiksi avoin väli $((x + a)/2, \infty) \in T_{\text{tavallinen}}$, ja koska $a < (x + a)/2 < x$, niin $f\left(((x + a)/2, \infty)\right) = ((x + a)/2, \infty) \subset (a, \infty)$.

Toinen ratkaisutapa: Luennoista tiedetään että funktio on jatkuva jos ja vain jos jokaisen maalipuolen avoimen joukon alkukuva on avoin. Maalipuolen avoimet joukot ovat $\emptyset$, $\mathbb{R}^1$ ja (a, ∞) kaikilla $a \in \mathbb{R}^1$; näiden alkukuvat ovat $\emptyset$, $\mathbb{R}^1$ ja (a, ∞) kaikilla $a \in \mathbb{R}^1$; nämä ovat kaikki tavallisen topologian avoimia joukkoja.

(3) Onko edellisen tehtävän kuvauksen f käänteiskuvaus f^{-1} jatkuva? Onko f homeomorfismi? Onko f suljettu? Onko f avoin?

$* * *$

Kuvaus f^{-1} ei ole jatkuva; esimerkiksi tavallisen topologian avoin joukko $(1,3)$ on pisteen $2 = f^{-1}(2)$ ympäristö mutta ei ole sellaista 2:n ympäristöä $A \in T_{(a,\infty)}$ että $f^{-1}(A) = A \subset (1,3)$.

Koska f^{-1} ei ole jatkuva niin f ei voi olla homeomorfismi. Homeomorfismit määritellään bijektioina jotka ovat jatkuvia ja joiden käänteisfunktiot ovat jatkuvia.

Funktio f ei ole suljettu eikä avoin; tämä nähdään esimerkiksi joukoilla $(1,2)$ ja $[1,2]$, joiden kuvat eivät ole avoimia, eivät suljettuja *maalipuolen topologiassa* $T_{(a,\infty)}$. (Huomaa että joukko $(1,2)$ todistaa myös sen, että f^{-1} ei ole jatkuva; vertaa ed. tehtävän toinen ratkaisutapa.)

(4) Olkoon $f : (X,T) \to (Y,T')$ jatkuva, ja olkoon $T \subset T_1$ ja $T_1' \subset T'$. Osoita, että $f : (X,T_1) \to (Y,T_1')$ on jatkuva.

$* * *$

Kuvaus f on jatkuva pisteessä x, jos jokaiselle $V_{f(x)}$ on olemassa U_x s.e. $f(U_x) \subset V_{f(x)}$.

Olkoon $x \in X$. Olkoon V $f(x)$:n ympäristö topologiassa T_1'. Koska $T_1' \subset T'$, niin jatkuvuuden $T \to T'$ nojalla on olemassa x:n ympäristö $U \in T$ s.e. $f(U) \subset V$. Koska $T \subset T_1$, niin $U \in T_1$.

(5) Osoita, että $\overline{B}^n \approx I^n$ konstruoimalla jokin niiden välinen homeomorfismi.

$* * *$

Muistetaan että B^n on n-ulotteinen yksikkökuula, jonka sulkeuma on

$$\overline{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\},$$

ja I^n on n-ulotteinen yksikkökuutio,

$$I^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1 \text{ kaikilla } i = 1, \ldots, n\}.$$

Kuutioon I^n kuuluvilla pisteillä $x \in \mathbb{R}^n$ on n koordinaattia, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kaikki välillä $[0,1]$. Kuulaan $\overline{B}^n$ kuuluvat pisteet voidaan ilmoittaa n:llä pallokoordinaatilla; nämä ovat etäisyys origosta r ja kulmat $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$, joiden arvot ovat väleillä $[0,1]$, $[0,2\pi]$ ja $[0,\pi]$. (Tämä ratkaisutapa on selkeämpi mikäli käytetään pallokoordinaatteja.) Koska molempia on n kappaletta, ne voidaan yhdistää pareittain bijektioilla, esimerkiksi $f_1 : [0,1] \to [0,\pi]$, $f(x) = \pi x$. Nämä n komponenttia määräävät yhdessä jatkuvan bijektion $\overline{B}^n \to I^n$, jonka käänteisfunktio on selvästi myös jatkuva. Tämä funktio on vaadittu homeomorfismi.