Topologia
Syksy 2010
Harjoitus 3

(1) Osoita, että projektio $P_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, $P_1(x, y) = x$, on avoin muttei suljettu kuvaus. (Topologiana molemmin puolin on reaaliakselin tavallinen topologia.)

$* * *$

Avoin, eli kuvaa avoimet joukot avoimille joukoille: Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko. Jos sen kuva $P_1(A)$ ei olisi avoin joukko, niin olisi olemassa piste $x \in P_1(A)$ siten, että jokaiselle $\epsilon > 0$ olisi olemassa piste $z \notin P_1(A)$ siten, että $|x - z| < \epsilon$. Nyt x on jonkin pisteen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kuva. Koska pisteille z pätee $z \notin P_1(A)$, niin pisteet $(z, y) \in \mathbb{R}^2$ ovat joukon A komplementissa. Koska $|(x, y) - (z, y)| = |x - z|$, pisteet (z, y) osoittaisivat että A ei ole avoin. Tämä on ristiriita; näin ollen $P_1(A)$ on avoin.

Ei suljettu, eli ei kuvaa kaikkia suljettuja joukkoja suljetuille joukoille: Ehdot $x_2 = 1/x_1$ ja $x_1 > 0$ toteuttavat pisteparit (x_1, x_2) määräävät tasoon $\mathbb{R}^2$ käyrän joka on suljettu joukko.[1] Sen kuva projektion P_1 kautta on avoin väli $(0, \infty)$, joka ei ole suljettu.[2] Koska tämä suljettu joukko ei kuvaudu suljetulle joukolle, ei P_1 ole suljettu.

(2) Osoita funktion $f(x) = x \sin x$ avulla, ettei Lauseen 2.6 vastine esikannoille ole tosi.

Lause. Olkoot X ja Y avaruuksia, $f : X \to Y$ ja $\underline{B}$ X:n kanta. Jos $f(B)$ on avoin kaikilla $B \in \underline{B}$, niin f on avoin.

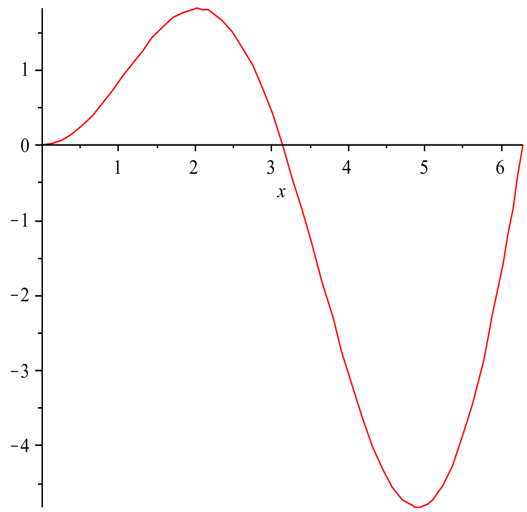
$* * *$

Jos lause ei ole totta esikannoille, riittää löytää sellainen esikanta $\underline{B}$ jonka alkioiden $B \in \underline{B}$ kuvat $f(B)$ ovat avoimia, mutta jonka virittämälle topologialle f ei ole avoin. Tarvittava funktio f on annettu yllä; tarvittava topologia on reaaliakselin tavallinen topologia ja sen luennoissa esiintynyt esikanta, joka muodostuu joukoista $(-\infty, b)$ ja (a, ∞). Jos $x \to \pm\infty$, niin $f(x) = x \sin x$ värähtelee saaden kaikki mahdolliset arvot; näin

[1] Koska valittiinpa mikä tahansa käyrällä olematon piste, sitä lähin käyrä piste olisi etäisyydellä ϵ, ja $\epsilon/2$-säteinen pallo olisi avoin käyrää leikkaamaton ympäristö.

[2] Koska piste 0 ei kuulu joukkoon, ja sillä ei silti ole käyrää leikkaamatonta ympäristöä.

ollen $f((-\infty, b)) = f((a, \infty)) = (-\infty, \infty)$, joka on avoin joukko. Esikannan joukot siis kuvautuvat avoimille joukoille. Entä tavallisen, tämän esikannan virittämän, topologian joukot? Eräs tällainen joukko on avoin väli $(0, 2\pi)$. Katsomalla sen kuvaajaa (ks. Kuva 1) on ilmeistä että sen kuvajoukko on suljettu väli.[3]



Kuva 1. $f(x) = x \sin x$ välillä $(0, 2\pi)$

(3) Millaisia avoimia joukkoja kuuluu (a, ∞)-topologian joukossa $[0, 1]$ määräämään relatiivitopologiaan? Mitä on $\overline{\{0\}}$ tässä topologiassa? Entä $\overline{\{0, 1\}}$?

* * *

Koska $T_{(a,\infty)} = \{\emptyset, \mathbb{R}^1\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}^1\}$, niin

$$\begin{aligned} T_{(a,\infty)}\big|_{[0,1]} &= \{\emptyset, [0, 1]\} \cup \{(a, \infty) \cap [0, 1] \mid a \in \mathbb{R}^1\} \\ &= \{\emptyset, [0, 1]\} \cup \{(a, 1] \mid 0 \le a \le 1\}. \end{aligned}$$

Suljetut joukot ovat näiden komplementteja, eli

$$\{[0, 1], \emptyset\} \cup \{[0, a] \mid 0 \le a \le 1\}.$$

Näistä pienin joka sisältää joukon $\{0\}$ on $[0, 0] = \{0\}$, joten $\overline{\{0\}} = \{0\}$. Samoin $\overline{\{0, 1\}} = [0, 1]$.

[3]Se *mikä* suljettu väli tämä kuva on, on parempi jättää sanomatta; selvästikin välin rajat löytyvät tarkastelemalla funktion f arvoja sen derivaatan välillä $(0, 2\pi)$ olevissa nollakohdissa. Tämä johtaa ihmisen etsimään yhtälön $\tan x + x = 0$ ratkaisuja välillä $(0, 2\pi)$; näitä ratkaisuja ei saa irti muuten kuin vain likiarvoina.

(4) Todista tarkasti Seuraus 3.8.

Seuraus. Olkoon (X, T) avaruus ja $A \subset B \subset X$. Tällöin $T|_A = (T|_B)|_A$.

* * *

Tämä tulos on seuraus Lauseelle 3.7.; näin ollen on luonnollista käyttää tätä lausetta sen todistamisessa. Lauseen nojalla, jos $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$, ja T'' on Z:n topologia, niin indusoidut topologiat T_1 ja T_2 ovat sama topologia. Tässä T_1 on kuvauksen $gf : X \to Z$ indusoima X:n topologia, joka syntyy Z:n topologiasta T''. Samoin T_2 on kuvauksen $f : X \to Y$ indusoima X:n topologia, joka syntyy Y:n topologiasta T', joka puolestaan on kuvauksen $g : Y \to Z$ topologiasta T'' indusoima. (Tämä on järkevää matemaattista tekstiä eikä XYZ-sillisalaattia; aukenee parin lukukerran jälkeen.)

Nyt voidaan valita kuvaukset $f(x) = x$ ja $g(x) = x$, joiden lähtö- ja maalijoukot ovat $f : A \to B$ ja $g : B \to X$. Tällöin f määrää joukon A relatiivitopologian joukossa B, mutta on tällä lailla kirjoitettuna myös joukon B joukkoon A kuvauksen f kautta indusoima topologia. Samoin g määrää joukon B relatiivitopologian joukossa X, ja on myös kuvauksen g joukosta X joukkoon B indusoima topologia. Koska $(gf)(x) = x$, $gf : A \to X$, niin fg määrää joukon A relatiivitopologian joukossa X, ja on samaten kuvauksen gf joukosta X joukkoon A indusoima topologia. Mutta nyt Lauseen 3.7. nojalla $T|_A = (T|_B)|_A$.

(5) Todista Lause 3.10.

Lause. Olkoon $f_j : X \to Y_j$, $j \in J$, ja $g_{jk} : Y_j \to Z_{jk}$, $k \in K_j$. Olkoot Z_{jk} avaruuksia,[4] jolloin perhe $(g_{jk})_{k \in K_j}$ indusoi Y_j:hin topologian T_j, ja perhe $(f_j)_{j \in J}$ näistä X:ään topologian T. Tällöin T on sama kuin perheen $(g_{jk} f_j)_{j \in J, k \in K_j}$ indusoima X:n topologia.

~~(Huom. Luennoissa saattoi lukea $(g_{jk} f_j)_{j \in J, k \in K_j}$, mikä oli väärin. Koska $f_j : X \to Y_j$ ja $g_{jk} : Y_j \to Z_{jk}$, funktiot pitää yhdistää järjestyksessä $f_j g_{jk}$.)~~

(Huom. Laskuharjoituslapussa saattoi lukea $(f_j g_{jk})_{j \in J, k \in K_j}$, mikä oli väärin. Siinä piti sittenkin lukea $(g_{jk} f_j)_{j \in J, k \in K_j}$. Luupää

[4] Tällä kurssilla ”avaruus” tarkoittaa ”joukko jolla on topologia”; X yksinään on pelkästään joukko pisteitä, mutta jos sillä on jokin topologia T_X, niin puhutaan avaruudesta (X, T_X) tai avaruudesta X.

laskuharjoitusten pitäjä O. Toivanen unohti kummin päin yhdistetty funktio kirjoitetaan. Hänen tekosyynsä on että kirjan seuraava lause, Lause 3.11, koski erilaista mutta hämmentävän samankaltaista tapausta jota äkkiä vilkaisemalla hän "varmisti" että muka oli todellakin löytänyt virheen. Anteeksi.)

* * *

Huomaa ensin, että jos meillä on yksi kuvaus $f_j : X \to Y_j$, ja jokin joukon Y_j topologia T_j, niin tämän topologian joukkojen alkukuvat kuvauksen f_j kautta määräävät aina joukolle X topologian. Jos meillä puolestaan on monta kuvausta f_j ja monta joukkoa Y_j ja niistä jokaisella joku topologia T_j, niin niiden kaikkien alkukuvien yhdiste on pelkästään sekalainen kokoelma joukon X osajoukkoja, eikä varma topologia. Sen sijaan:

Kuvausperheen $f_j : X \to Y_j$, $j \in J$, joukkoon X määräämä topologia määritellään joukon $\{f_j^{-1}V \mid V \subset T_j, j \in J\}$ joukkoon X *virittämänä* topologiana.[5]

No, nyt itse todistus.

Ensin: Näytetään että jos A kuuluu lauseen toisen topologian (kuvaukset $f_j g_{jk}$) virittävään joukkoon, niin se kuuluu ensimmäisen topologian (kuvaukset f_j ja g_{jk}) virittävään joukkoon.

Olkoon $A \subset X$ sellainen joukko, että $A = (g_{jk} f_j)^{-1}(V)$ jollekin $V \in T_{jk}$, jollekin $j \in J$ ja $k \in K_j$. Tällaiset joukot A virittävät lauseen väitteen toisen topologian. Koska V kuuluu topologiaan T_{jk}, niin sen alkukuva kuvauksen g_{jk} kautta kuuluu topologian T_j virittävään joukkoon. Koska $g_{jk}^{-1}(V)$ kuuluu topologian T_j virittävään joukkoon, niin $g_{jk}^{-1}(V)$ kuuluu topologiaan T_j. Koska $g_{jk}^{-1}(V)$ kuuluu topologiaan T_j, niin sen alkukuva kuvauksen f_j kautta, se on, $(g_{jk} f_j)^{-1}(V)$, kuuluu joukkoon joka virittää topologian T, se on, lauseen väitteen ensimmäisen topologian. Näin ollen jokainen toisen topologian virittävän joukon alkio kuuluu ensimmäisen topologian virittävään joukkoon, joten toinen topologia kuuluu ensimmäiseen.

[5]Ja se että joukko C virittää topologian tarkoittaa että joukko C on erään topologian esikanta: sen äärellisistä leikkauksista saadaan kanta, jonka yhdisteistä saadaan itse topologia.

Sitten: Näytetään että ensimmäinen topologia (kuvaukset f_j ja g_{jk}) sisältyy toiseen topologiaan (kuvaukset $g_{jk}f_j$).

Olkoon nyt $B \subset X$ sellainen joukko, että $B = f_j^{-1}(U)$ jollekin $U \in T_j$. Nyt on kaksi vaihtoehtoa.

(1) On olemassa $W \in T_{jk}$ jollekin $k \in K_j$ siten, että $g_{jk}^{-1}(W) = U$. Tällöin $B = f_j^{-1}(U) = (g_{jk}f_j)^{-1}(W)$, joten B kuuluu joukkoon joka virittää lauseen väitteen toisen topologian.

(2) Ei ole olemassa yhtä joukkoa W missään avaruudessa T_{jk}, $k \in K_j$, siten että $g_{jk}^{-1}(W) = U$. Koska topologiat T_{jk} ja kuvaukset g_{jk}, $k \in K_j$, kuitenkin virittävät topologian T_j johon U kuuluu, niin on olemassa joukkokokoelma W_i, jokainen W_i kuuluu johonkin joukoista T_{jk}, $k \in K_j$, siten että U on näiden joukkojen alkukuvien äärellisten leikkausten ja yhdisteiden tulos.

Mutta näistä joukoista W_i jokainen yksitellen kuuluu lauseen toisen topologian virittävään joukkoon, joten ne yhdessä virittävät ainakin ne joukot jotka joukko B virittää.

Näistä yhdessä seuraa, että lauseen ensimmäinen topologia sisältyy toiseen, ja koska toinen sisältyy ensimmäiseen, ne ovat sama topologia.