Topologia
Syksy 2010
Harjoitus 4

(1) Keksi funktio f ja suljetut välit $A_i \subset \mathbb{R}^1$, $i = 1, 2, \ldots$ siten, että $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $f\,|_{A_i}$ on jatkuva jokaisella $i \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{R}^1$, ja $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ ei ole jatkuva.

* * *

Lause 3.14 koski niitä ehtoja jolloin funktio *oli* tämänkaltaisissa tilanteissa koko joukossa jatkuva; nyt voi aavistaa että avain tähän tehtävään on se, että Lauseessa vaadittiin suljettujen joukkojen tapauksessa että niitä olisi vain äärellisen monta; näin ollen avain on se, että joukkoja A_i saa olla äärettömän monta.

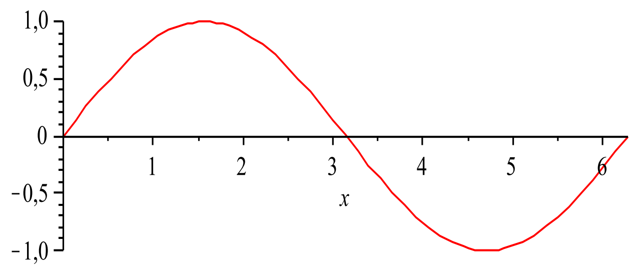
Esim. $A_1 = (-\infty, 0]$ ja $A_i = [1/i, \infty)$ kun $i = 2, 3, \ldots$. Funktioksi f käy $f(x) = 1$ kun $x > 0$, $f(x) = 0$ kun $x \leq 0$.

(2) Olkoon $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Minkä topologian maalipuolen (a, ∞)-topologia indusoi?

* * *

Päivitetty: demoissa jaetussa vastauksessa oli virhe.

Katsotaan millaisia ovat (a, ∞)-topologian avoimien joukkojen alkukuvat. Tiedetään että funktion $\sin x$ arvot ovat välillä $[-1, 1]$. Koska useimmilla sinin arvoilla y on kaksi alkukuvaa välillä $[0, 2\pi]$ (siis kaksi lukua x s.e. $\sin x = y$), merkitään näistä pienempää $\arcsin_1 y$ ja suurempaa $\arcsin_2 y$. Esim. $\arcsin_1(1/\sqrt{2}) = \pi/4$ ja $\arcsin_2(1/\sqrt{2}) = 3\pi/4$.



Kuva 1. $f(x) = \sin x$ välillä $[0, 2\pi]$

Jos $a \geq 1$ (tai jos joukko on $\emptyset$), joukon (a, ∞) alkukuva on $\emptyset$.

Jos $a < -1$ (tai jos joukko on $\mathbb{R}$), alkukuva on $[0, 2\pi]$.
Jos $0 \leq a < 1$, niin $f^{-1}((a, \infty)) = (\arcsin_1 a, \arcsin_2 a)$.
Jos $-1 < a < 0$, niin $f^{-1}((a, \infty)) = [0, 2\pi] \setminus [\arcsin_1 a, \arcsin_2 a]$.
Jos $a = -1$, niin alkukuva on $[0, 2\pi] \setminus \{3\pi/2\}$.

Siispä indusoitu topologia koostuu seuraavia muotoja olevista joukoista: $\emptyset, [0, 2\pi], [0, 2\pi] \setminus \{3\pi/2\}, (a, b)$, ja $[0, 2\pi] \setminus [c, d]$. Tässä $a, b \in (0, \pi)$ s.e. $a < b$ ja $\sin a = \sin b$, ja $c, d \in (\pi, 2\pi)$ s.e. $c < d$ ja $\sin c = \sin d$.

(3) Näytä: a) Kokonaisluvut $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ovat diskreetti joukko.
b) Rationaaliluvut $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eivät ole diskreetti joukko.

(Käytetään tavallista topologiaa. Joukko A on diskreetti mikäli sen jokaiselle pisteelle x löytyy avoin joukko B siten, että $A \cap B = \{x\}$.)

* * *

a) Olkoon x kokonaisluku. Tällöin $\left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right)$ on avoin joukko joka sisältää pisteen x, mutta ei sisällä muita kokonaislukuja.

b) Selvästikin 0 on rationaaliluku; $0/1$ mikäli tahtoo olla ylitarkka. Selvästikin $1/i$ on rationaaliluku jokaiselle $i = 1, 2, \ldots$, ja

$$\lim_{i \to \infty} 1/i = 0.$$

Tällöin jokaiselle nollan ympäristölle U löytyy riittävän iso i siten, että $1/j \in U$ kun $j \geq i$. Täten olla ei ole sellaista nollan ympäristöä jossa se olisi ainoa rationaaliluku; näin ollen nolla on rationaaliluku mutta ei ole diskreetti piste rationaalilukujen joukossa, joten rationaaliluvut eivät ole diskreetti joukko. (Tästä voisi päätellä myös paljon vahvemman tuloksen, nimittäin sen että rationaalilukujen joukossa ei ole yhtään diskreettiä pistettä. Tätä varten rationaalilukua p/q voisi lähestyä jonolla $r_i = (pi + q)/qi$, jolle $\lim_{i \to \infty} r_i = p/q$.)

(4) Olkoon $f : X \to Y$ ja olkoon Y avaruus. Käytetään joukossa X kuvauksen f indusoimaa topologiaa. Osoita, että funktio $f : X \to f(X)$ on avoin.

* * *

Olkoon U mielivaltainen X:n topologian avoin joukko. Koska tämä topologia on kuvauksen f ja avaruuden Y indusoima, on olemassa Y:n topologian avoin joukko V siten, että $U = f^{-1}(V)$. Tällöin $f(U) = V$, eli U:n kuva on avoin.

(5) Olkoon $A = \{a, b\}$ diskreetillä topologialla varustettu avaruus. Anna kaksi joukon $A^{\mathbb{N}}$ alkiota, ja yksi avoin joukko $B \in A^{\mathbb{N}}$.

* * *

Nyt tarkkana. Joukon A diskreetti topologia tarkoittaa kaikkien A:n osajoukkojen joukkoa; jos tätä topologiaa merkitään T_A, niin

$$T_A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}.$$

Tuloavaruus $A^{\mathbb{N}}$ eli $A \times A \times A \times A \times \cdots$ koostuu äärettömistä jonoista A:n alkioita. (Huomaa että *alkioita*, ei *avoimia joukkoja*.) Samaan tapaan kuin mitä $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$ ja $(0, 1, -1, 3) \in \mathbb{R}^4$, niin esim.

$$(a, a, a, \ldots) \in A^{\mathbb{N}}.$$

(Tässä ajatellaan olevan selvää että jokainen alkio on a.) Tätä voidaan merkitä myös $aaaaa \ldots \in A^{\mathbb{N}}$, aivan samalla lailla kuin luennoissa merkittiin joukon $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ erästä alkiota muodolla $01010101\ldots$.

Toisena joukon $A^{\mathbb{N}}$ alkiona voidaan vaikkapa antaa "jono" x_i, $i = 1, 2, \ldots$, missä $x_i = a$ kun i on parillinen ja b kun i on pariton. (Eli $(x_i)_i = (b, a, b, a, b, a, \ldots) = babababa \ldots$ — oudolla esimerkillä on monta merkintätapaa.)

Nämä detaljit on selitetty näin pitkästi siksi, että avoimen joukon $B \in A^{\mathbb{N}}$ löytämisessä on eräs isohko sudenkuoppa. Helposti voisi ajatella että koska $\{a\}$ on A:n topologian avoin joukko, riittää vain kirjoittaa $(\{a\}, \{a\}, \{a\}, \{a\}, \{a\}, \ldots)$ samaan tapaan kuin yllä alkioille. Tämä ei käy, koska ääretön tulotopologia ei ole aivan yhtä yksinkertainen kuin äärellinen.[1] Äärettömässä tulotopologiassa *vain äärellinen määrä topologian koordinaattijoukoista saa olla muuta kuin koko joukko*; tässä tapauksessa koko joukko on A.

Tämä on tarkemmin selitetty luennoissa, ja on seuraus siitä että kun tulotopologia johdetaan projektioiden indusoimana topologiana, saadaan aikaan ensin esikanta, ja sitten sen *äärellisinä* leikkauksina topologian kanta. Näin ollen topologiassa ei voi "leikata pienemmäksi" kuin vain äärellisen monta sen koordinaattia.

---

[1] Esim. joukon A^3 tulotopologiassa voisi huoleta valita avoimen joukon $(\{a\}, \{a\}, \{a\})$. Lisähuomiona sanottakoon että yleisissä tulotopologioissa ei ole mitään uutta — tason neliö $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x, y < 1\}$ on joukon $\mathbb{R}^2$ tulotopologian alkio $((-1, 1), (-1, 1))$, missä kumpikin $(-1, 1)$ on $\mathbb{R}^1$:n topologian avoin joukko, nimittäin tavallinen avoin väli.

Sama hieman pidemmin — tämän selityksen voi jättää väliin mikäli ymmärtää asian. Tässä tapauksessa projektiot ovat funktioita $P_i : A^{\mathbb{N}} \to A$, $P_i(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots) = x_i$. Projektiot P_i indusoivat maalipuoliltaan yhteiselle lähtöpuolelleen topologian, jonka esikanta on niiden maalipuolien avoimien joukkojen alkukuvien joukko. Esimerkiksi $\{a\}$ on projektion P_2 maalipuolen avoin joukko, joten $P_2^{-1}(\{a\}) = (A, \{a\}, A, A, A, \ldots)$ kuuluu tuohon esikantaan. (So. jokainen piste $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in (A, \{a\}, A, A, A, \ldots)$ kuvautuu projektion P_2 kautta pisteelle $\{a\}$.) Muut projektion P_2 määräämät esikannan alkiot ovat $(A, \{b\}, A, A, A, \ldots)$, $(A, A, A, A, A, \ldots)$ ja $\emptyset$.[2]

Jos otetaan kaikkien projektioiden P_i määräävät alkukuvat, niin nähdään että ne ovat tulojoukkoja joissa kussakin vain yksi koordinaattijoukko eroaa koko joukosta A. Näin ollen tällaisten joukkojen *äärellisissä* leikkauksissa, joita kannan alkiot ovat, vain *äärellisen* monta koordinaattijoukkoa eroaa koko joukosta A. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} &(\{a\}, A, A, A, A, A, \ldots) \\ &\cap (A, \{b\}, A, A, A, A, A, \ldots) \\ &\cap (A, A, \emptyset\, A, A, A, A, \ldots) \\ =&(\{a\}, \{b\}, \emptyset, A, A, A, A, \ldots). \end{aligned}$$

Näin saadaan kannan joukot; ja koska avoimet joukot saadaan kannan joukkojen yhdisteinä so. joukkoina jotka ovat ainakin niin suuria kuin kannan joukot, niin avoimissakin joukoissa vain äärellisen monta koordinaattijoukkoa eroaa koko joukosta A.

(Vähemmän kädenheilutukseen ja enemmän matematiikkaan nojaava selitys on, kuten sanottua, luennoissa.)

Näin ollen eräs tulotopologian avoin joukko olisi esimerkiksi

$$B = ababAAAAAAA\ldots,$$

eli

$$(\{a\}, \{b\}, \{a\}, \{b\}, A, A, A, A, A, A, A, \ldots),$$

missä viidennestä koordinaatista lähtien kukin alkio on koko joukko A. Edellä annettu $aaaa\ldots$ ei ole tulotopologian avoin joukko; ja koska sen komplementti on $bbbb\ldots$, ei se ole myöskään suljettu joukko; se on pelkästään harhaanjohtava tulojoukko.

[2]Ei suinkaan $(A, \emptyset, A, A, \ldots)$. Eihän myöskään sanottaisi että jos $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = x$, niin $g^{-1}(\emptyset) = (\mathbb{R}^1, \emptyset)$ — tällaisessa joukossa ei ole mitään järkeä. ”Alkioparit niin että ensimmäinen on reaaliluku ja toinen, äh, toista ei ole.” Täytyy sanoa, että $g^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(6) Olkoon X avaruus, $A \subset B \subset X$ ja A tiheä B:ssä. Osoita, että A on tiheä $\overline{B}$:ssa.

* * *

Joukko $A \subset X$ on *tiheä X:ssä*, jos jokainen avaruuden X ei-tyhjä avoin joukko kohtaa A:n. (Jos X on jonkin suuremman joukon osajoukko, niin käytetään relatiivitopologiaa.)

Olkoon T avaruuden X topologia. Tällöin relatiivitopologiaan $T\mid_B$ kuuluva kaikki joukot $V \cap B$, missä $V \in T$. Koska A on tiheä B:ssä, tiedetään että jos D on ei-tyhjä topologian $T\mid_B$ avoin joukko, niin $A \cap D \neq \emptyset$. Olkoon C ei-tyhjä topologian $T\mid_{\overline{B}}$ avoin joukko. Tällöin relatiivitopologian määritelmän nojalla jollekin avoimelle joukolle $V \in T$ pätee $C = V \cap \overline{B}$, eli

$$C = (V \cap B) \cup (V \cap (\overline{B} \setminus B)).$$

Koska V on topologian T avoin joukko, niin $V \cap B \in T\mid_B$, joten $(V \cap B) \cap A$ on epätyhjä; näin ollen $C \cap A$ eli

$$\Big((V \cap B) \cup (V \cap (\overline{B} \setminus B)) \Big) \cap A$$

on epätyhjä.

(Tiheys voidaan määritellä myös näin: ”A on tiheä B:ssä, jos $\overline{A} = B$.” Tämä tulisi kuitenkin muotoilla ”A on tiheässä B:ssä, jos $T\mid_B$*-sulkeuma* $\overline{A} = B$.” Muuten muotoilussa ei ole mitään järkeä, sillä koska sulkeuma $\overline{A}$ on suljettu joukko, ja koska joukoksi A voidaan valita B itse, niin olisi todistettu että kaikki joukot ovat suljettuja tavallisen topologian mielessä! Sen sijaan oikeasta määritelmästä voidaan päätellä vain, että jokainen joukko on suljettu itsensä määräämässä relatiivitopologiassa, missä ei ole mitään mullistavaa; topologian koko joukko on aina suljettu ja avoin.)