Topologia
Syksy 2010
Harjoitus 5

---

(1) Avaruus $X \neq \emptyset$ on *nollaulotteinen*, jos sillä on kanta, jonka jäsenet ovat suljettuja eli joiden reuna on tyhjä. Osoita että diskreetti topologia on nollaulotteinen.

* * *

Diskreetissä topologiassa jokainen joukko on avoin. Tällöin jokaisen joukon komplementti on avoin; joten jokainen joukko on suljettu. Erityisesti jokainen kannan joukko on suljettu; joten topologia on nollaulotteinen.

(2) Osoita että $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$ on nollaulotteinen. (Käytä demojen 4 teht. 5 topologiaa.)

* * *

Huomaa että

i) demojen 4 teht. 5 topologia on diskreetti.
ii) diskreetti topologia on nollaulotteinen (teht. 1 yllä).
iii) diskreettien topologioiden muodostama tulotopologia *ei välttämättä ole diskreetti.* Erityisesti luennoista muistetaan että diskreettien topologioiden muodostama avaruus $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ei ole diskreetti; ja koska sillä millä glyyfillä alkioita merkitään ei tässä ole merkitystä, niin tiedetään että $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$ ei ole diskreetti.
iv) edellisistä seuraa se, ettei voida vain sanoa "avaruus $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$ on diskreetti koska se muodostuu diskreeteistä avaruuksista, joten teht. 1 nojalla se on nollaulotteinen."

Tämän tähden tehdään itse tehtävä allaolevalla tavalla.

Merkitään $A = \{a, b\}$. Tehtävän topologian kanta koostuu joukoista

$$\prod_{i=1}^{\infty} U_i = U_1 \times U_2 \times U_3 \times \cdots ,$$

missä $U_i \in \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$, ja lukuun ottamatta äärellisen montaa joukkoa U_i, kaikille U_i pätee $U_i = A$. Olkoon näiden äärellisen monen poikkeusjoukon indeksijoukko J.[1]

---

[1] Esim. jos joukot U_1, U_2 ja U_4 poikkeavat koko joukosta, $J = \{1, 2, 4\}$.

Tällaisen joukon komplementti koostuu niistä pisteistä jotka eivät kuulu siihen. Piste ei kuulu joukkoon jos yksikin sen koordinaatti poikkeaa joukon sallituista koordinaateista; näin ollen komplementti on

$$\bigcup_{j\in J} A \times A \times \cdots \times A \times \underbrace{(A \setminus U_j)}_{j\text{:s koordinaatti}} \times A \times \cdots .$$

Tämän yhdisteen jokainen osa $A\times A\times\cdots\times A\times(A\setminus U_j)\times A\times\cdots$ on tulotopologian avoin joukko (vain äärellisen moni, nimittäin yksi, koordinaatti eroaa koko joukosta), joten osien yhdiste on avoin. Näin ollen alkuperäinen kannan joukko on suljettu.

Esim. Yksi kannan joukoista on $\{a\}\times\{b\}\times A\times A\times A\times A\times\cdots$; merkitään sitä ja tämän esimerkin joukkoja lyhyyden vuoksi ilman karteesisia tuloja näin: $abAAAA\ldots$. Tälle joukolle täydestä joukosta poikkeavien koordinaattien indeksijoukko on $J = \{1,2\}$, ja tämän joukon komplementti on (sulkeet selvyyden vuoksi)

$$(bAAAAA\ldots) \cup (AaAAAA\ldots). \tag{1}$$

(Tässä voi helposti mennä täysin metsään ja väittää joukon $abAAAA\ldots$ komplementin olevan $baAAAA\ldots$; mutta esim. alkio $aaaaaa\ldots$ selvästikin ei kuulu kannan joukkoon,[2] kuuluu rivin (1) oikein johdettuun komplementtiin, ja ei kuulu väärin, huitoen ja eksessiivisen simplifistisesti määrättyyn valekomplementtiin $baAAAA\ldots$.) Koska $bAAAAA\ldots$ ja $AaAAAA\ldots$ ovat avoimia joukkoja, niiden yhdiste on avoin; joten $abAAAA\ldots$ on suljettu.

(3) Osoita että numeroituvan monen suljetun joukon tulo on suljettu.

* * *

Jos tehtävänannon kirjoittaa pitemmin auki, se on: Olkoon meillä kokoelma avaruuksia X_j, $j = 1,2,\ldots$. Olkoon $X = \prod_{j=1}^{\infty} X_j$ niiden muodostama tuloavaruus. Osoita, että jos $C_j \subset$

[2] No, väännetään rautalangasta: Kuuluuko $aaaaaa\ldots$ joukkoon $abAAAA\ldots$ tarkoittaa tätä: Onko sen 1. koordinaatti a, ja onko sen 2. koordinaatti b, ja onko sen 3., 4., 5. jne. koordinaatti joukossa A (= joko a tai b)? Koska 2. koordinaatti ei ole a vaan on b, ei tämä alkio kuulu tähän joukkoon. Tällaiset selitykset voivat tuntua itsestäänselviltä ja typeriltä, mutta matematiikassa on ajoittain vaarana että jokin hyvin yksinkertainen asia jää ymmärtämättä, josta seuraa pahemmanlaatuinen käsitekramppikamppi myöhemmin.

X_j, $j = 1, 2, \ldots$ ja jokainen C_j on omassa avaruudessaan suljettu joukko, niin

$$\prod_{j=1}^{\infty} C_j \tag{2}$$

on suljettu joukko tulotopologialla varustetussa avaruudessa X.

Joukko $\prod_{j=1}^{\infty} C_j$ on suljettu, jos sen komplementti on avoin. Tämä komplementti on

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{j-1} \times (X_j \setminus C_j) \times X_{j+1} \times \cdots . \tag{3}$$

Koska C_j on suljettu avaruudessa X_j, on $X_j \setminus C_j$ avoin avaruudessa X_j. Tällöin jokaisella j joukko

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{j-1} \times (X_j \setminus C_j) \times X_{j+1} \times \cdots$$

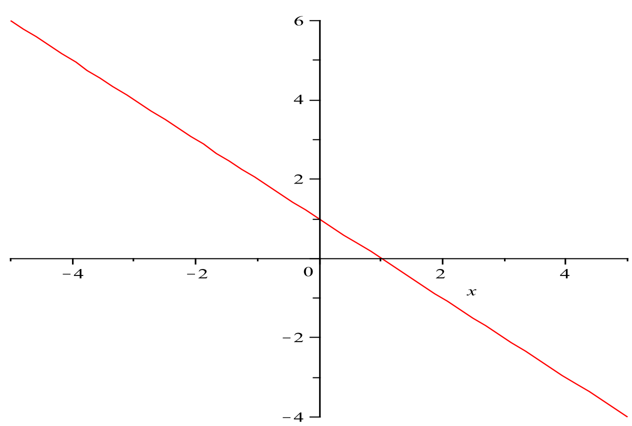
on avoin avaruudessa X, koska se kuuluu avaruuden kantaan. Siispä komplementti (3) on avoimien joukkojen yhdisteenä avoin, joten joukko (2) on suljettu.

(4) Olkoon $X = \mathbb{R}^1$ jonka kantana ovat demojen 1 teht. 2 puoliavoimet välit $[a, b)$. Osoita että $X \times X$:n osajoukko

$$A = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$$

on diskreetti.

* * *



KUVA 1. Osa joukosta $A = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$

Olkoon $(a, b) \in A$ so. $a + b = 1$. Joukko A on diskreetti, jos on olemassa pisteen a ympäristö U_a s.e. $U_a \cap A = \{a\}$. Valitaan

$U_a = [a, a+\epsilon) \times [b, b+\epsilon)$, missä $\epsilon > 0$ on mielivaltainen. Olkoon $(x, y) \in U_a$, $(x, y) \neq (a, b)$, mielivaltainen. Koska ainakin toinen pisteen (x, y) koordinaatti on aidosti vastaavaa pisteen (a, b) koordinaattia suurempi, pätee $x + y > a + b = 1$, joten $(x, y) \notin A$.

(5) Onko edellisen tehtävän A diskreetti jos käytetään tavallista topologiaa? Entä jos käytetään (a, ∞)-topologiaa?

* * *

Tavallisen topologian tapauksessa ei: käytettiinpä tavallisen topologian pallo- tai laatikkoympäristöjä, aina voidaan valita ympäristöstä piste $(a+\epsilon, b-\epsilon)$ (kunhan vain $\epsilon > 0$ on riittävän pieni); tällöin $(a+\epsilon)+(b-\epsilon) = a+b = 1$ joten $(a+\epsilon, b-\epsilon) \in A$.

(a, ∞)-topologian tapauksessa ei: koska ympäristö ei sisällä reunaansa, sen täytyy olla muotoa $(a - \epsilon_1, \infty) \times (b - \epsilon_2, \infty)$ joillekin $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, joten se sisältää aina myös muita joukon A pisteitä.[3]

Muistetaan (toivottavasti) aiemmista harjoituksista että $[a, b)$-topologia on hienompi kuin tavallinen topologia joka on hienompi kuin (a, ∞)-topologia, eli että $T_{(a,\infty)} \subset T_{\text{tav}} \subset T_{[a,b)}$. Hienommassa topologiassa on enemmän avoimia joukkoja, joten sillä voidaan käsitellä ja "mitata" pisteitä ja joukkoja "tarkemmin", mikä nähdään tässä ja edellisessä tehtävässä siinä että näistä kolmesta topologiasta hienoimmalla voidaan "rajata" suoran piste erilleen muista suoran pisteistä, kun taas karkeampien topologioiden "tarkkuus" ei tähän riitä, vaan riippumatta rajaajan huolellisuudesta aina mukaan tulee sohaistua muitakin suoran pisteitä.

(Henkilö jolla on liikaa vapaa-aikaa voi koettaa rakentaa sellaisen joukon josta joillakin eri topologioilla voidaan erottaa (a) kukin piste yksikköpisteeksi; (b) kukin piste ympäristöön jossa on vain äärellisen monta muuta saman joukon pistettä, ja (c) jokaisessa joukon pisteen ympäristössä on äärettömän monta muuta joukon pistettä. Tästä ei saa ylimääräistä rastia, mutta sen sijaan jonkin verran ajankulua ja mahdollisuuden esim. kahviossa sanoa kaverille että "Joo, olin tässä keksimässä kiinnostavia topologioita. *Ihan omaksi huvikseni.*")

---

[3] Jos tahtoisi olla liian tarkka, niin voisi sanoa että jokainen tällainen ympäristö sisältää *äärettömän* monta joukon A:n pistettä. Olkoon $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Tällöin $(a-\epsilon, b+\epsilon)$ kuuluu ympäristöön ja joukkoon A, ja niin kuuluu myös $x_i = (a-\frac{\epsilon}{i}, b+\frac{\epsilon}{i})$ jokaisella $i = 1, 2, \ldots$.