Topologia
Syksy 2010
Harjoitus 6

Koindusointi. Sanotaan että kuvaukset $f_j : X_j \to Y$ ja X_j:den topologiat T_j *koindusoivat* Y:lle topologian

$$T_1 = \{U \subset Y \mid f_j^{-1}(U) \in T_j\}.$$

(Tämän määritelmä-väitteen olennainen sisältö on se että tämän joukko T_1 on topologia so. toteuttaa topologian määritelmän ehdot.)

Indusointi antaa lähtöpuolelle topologian maalipuolelta; koindusointi antaa maalipuolelle topologian lähtöpuolelta.

$* * *$

(1) Keksi kuvaukset $f_i : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3\}$ ja tarpeelliset topologiat siten, että
  (a) f_1 koindusoi topologian $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$, ja
  (b) f_2 on samaistuskuvaus.

$* * *$

(a) Olkoon $f(4) = 1$ ja $f(x) = x$ muuten. Valitaan lähtöpuolelle topologia joka koostuu joukoista $\emptyset$, $\{1, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$ ja $\{1, 2, 3, 4\}$. Nähdään että

$$\begin{aligned} f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset, \\ f^{-1}(\{1\}) &= \{1, 4\}, \\ f^{-1}(\{1, 2\}) &= \{1, 2, 4\}, \\ f^{-1}(\{1, 2, 3\}) &= \{1, 2, 3, 4\}; \end{aligned}$$

muiden maalipuolen osajoukkojen alkukuvat eivät ole lähtöpuolen topologiassa.

(b) Kuvaus f avaruudelta X avaruudelle Y on samaistuskuvaus jos se on surjektio ja jos sen Y:hyn koindusoima topologia on sama kuin Y:n oma topologia. (Tällä kurssilla ”avaruus” on vain lyhennysmerkintä sanoille ”joukko ja sen topologia”.)

Esim. kohdan (a) kuvaus on tällainen. (Voi myös keksiä vaikeampia esimerkkejä jos niin tahtoo.)

(2) Olkoon R kokonaisluvuille määritelty ekvivalenssirelaatio siten, että xRy jos ja vain jos $x^2 = y^2$.

(a) Määrää ekvivalenssiluokka $p(x)$ jokaiselle $x \in \mathbb{Z}$, ja määrää $\mathbb{Z}/R$.

(b) Määrää sellainen $\mathbb{Z}$:n ositus $\mathbb{Z}/S$ joka erottaa parilliset positiiviset, parittomat positiiviset, parilliset negatiiviset, parittomat negatiiviset ja muut luvut toisistaan. Hahmottele näitä joukkoja lukusuoralle.

* * *

(a) Tässä $p(x) = \{-x, x\}$, ja

$$\mathbb{Z}/R = \{\{-a, a\} \mid a \in \mathbb{Z}\}.$$

(b) No, $\mathbb{Z}/S$ koostuu joukoista

$$\{k \mid k = 2n, n \in \mathbb{N}\},$$
$$\{k \mid k = -2n, n \in \mathbb{N}\},$$
$$\{k \mid k = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\},$$
$$\{k \mid k = -2n + 1, n \in \mathbb{N}\} \text{ ja } \{0\}.$$

Tässä $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

(3) Keksi jokin luonnollisten lukujen ositus, ja määrää sen määrittämä tekijäavaruus. (Jos se on tarpeen, voit käyttää luonnollisille luvuille diskreettiä topologiaa, (a, ∞)-topologian rajoittumaa, tai jotain muuta ei-triviaalia topologiaa.)

* * *

Esim. $A = \{A_0, A_1, A_2\}$, missä A_i sisältää luvut joiden jakojäännös kolmella jaettaessa on i. Olkoon $f : \mathbb{N} \to A$; siis kuvaus joka yhdistää yksittäiset luvut joukkoihin A_0, A_1 ja A_2 sen mukaan mihin joukkoon kukin luku kuuluu.[1] Tekijäavaruus on nyt valittu ositus plus kuvauksen f koindusoima topologia, niinsanottu tekijätopologia.

Jos käytetään lähtöpuolella diskreettiä topologiaa niin tekijätopologia on A:n potenssijoukko,

$$\operatorname{pot} A = \{\emptyset, A_0 \cup A_1, A_0 \cup A_2, A_1 \cup A_2, A\},$$

sillä jokainen $\mathbb{N}$:n osajoukko on diskreetissä topologiassa avoin, joten jokaisen A:n osajoukon alkukuva on avoin.

Jos käytetään lähtöpuolella (a, ∞)-topologian rajoittumaa (so. ei-triviaaleja avoimia joukkoja ovat $B_i = \{k \in \mathbb{N} \mid k > i\}$) niin ainoat koindusoidun topologian avoimet joukot ovat $\emptyset$ ja A.

Mikäli tahtoo ei-kiinnostavan osituksen, niin kyllähän $\{\mathbb{N}\}$ on $\mathbb{N}$:n ositus. Se koindusoi lähtöpuolen topologiasta riippumatta tekijätopologian $\{\emptyset, \{\mathbb{N}\}\}$.

[1] Esim. koska $3 \in A_0$ ja $4 \in A_1$, niin $f(3) = A_0$ ja $f(4) = A_1$.

(4) Olkoon (X, T) avaruus, ja olkoon $\underline{A}$ kokoelma X:n osajoukkoja. Tällöin inkluusiot $i_A : A \to X$, $A \in \underline{A}$, koindusoivat X:n topologian T_1, jota sanotaan X:n $\underline{A}$:n kanssa *koherentiksi* topologiaksi. Osoita että $T \subset T_1$.

* * *

Ensinnäkin: Mitä topologiaa joukoissa A käytetään? Tietenkin avaruuden (X, T) relatiivitopologiaa T_A.

Nyt topologiaan T_1 kuuluvat sellaiset joukot $U \subset X$, joille $i_A^{-1}(U) \in T_A$ jokaisella $A \in \underline{A}$. Koska kuvaukset i_A ovat nyt inkluusioita (X:n osajoukossa A määriteltyjä identtisiä kuvauksia), niin $f_A^{-1}(U) = U \cap A$; tämä voi olla myös tyhjä joukko. Tiedetään siis että U kuuluu topologiaan T_1 jos ja vain jos $U \cap A$ on avoin jokaisessa relatiivitopologiassa T_A. Mutta relatiivitopologian avoimet joukot ovat alkuperäisen topologian avoimien joukkojen ja joukon A leikkauksia. Siis jos $U \in T$, niin $U \cap A$ on avoin jokaisessa relatiivitopologiassa T_A, joten $U \in T_1$.

(5) Osoita edellisen tehtävän tapauksessa että $T\mid_A = T_1 \mid_A$ kaikilla $A \in \underline{A}$.

* * *

Topologia T_1 koostuu joukoista W, joista jokaiselle pätee $W \cap A \in T_A$. Relatiivitopologia $T_1 \mid_A$ koostuu joukoista $W \cap A$, mutta koska

$$(W \cap A) \cap A = W \cap A,$$

näistä joukoista jokainen kuuluu edelleen relatiivitopologiaan $T_A = T\mid_A$. (Sama topologia, eri merkintätapa.) Siispä $T_1 \mid_A \subset T\mid_A$.

Jos taas $U \in T_A$, niin tiedetään että $U = V \cap A$ jollekin $V \in T$. Edellisen tehtävän nojalla tiedetään että $V \in T_1$, joten $U = V \cap A \in T_1 \mid_A$. Näin ollen $T\mid_A \subset T_1 \mid_A$.

(6) Osoita tehtävän 4 tapauksessa, että jos $\underline{A}$ on X:n peite ja $\underline{A}$:n jäsenet ovat avoimia, niin $T = T_1$.

* * *

Muista: Se että $\underline{A}$ on X:n peite tarkoittaa, että $\bigcup_{A \in \underline{A}} A = X$.

Tehtävässä 4 näytettiin että $T \subset T_1$, joten riittää todistaa, että $T_1 \subset T$.

Olkoon $U \in T_1$, so. olkoon $U \subset X$ sellainen joukko että $U \cap A \in T_A$ jokaisella $A \in \underline{A}$. Koska $U \cap A \in T_A$, niin on olemassa $V \in T$ siten, että $V \cap A = U \cap A$. Koska jokainen joukko A on avoin topologiassa T eli $A \in T$, niin $V \cap A$ on kahden topologian T avoimen joukon leikkauksena avoin, eli $V \cap A = U \cap A \in T$. Tarkastellaan nyt joukkoa

$$\bigcup_{A \in \underline{A}} U \cap A.$$

Koska $\underline{A}$ on joukon X peite, niin tämä joukko on U. Koska se on myös mielivaltainen topologian T avoimien joukkojen yhdiste, on se myös topologiassa T avoin joukko, eli $U \in T$.