Topologia
Syksy 2010
Harjoitus 7

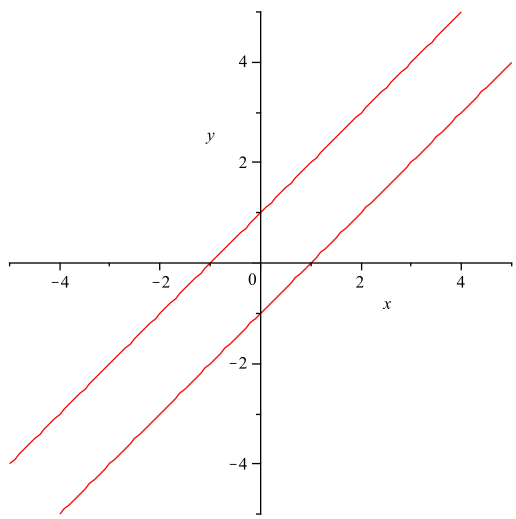
(1) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = |x-y|$. Määrää f:n kanoninen hajotelma; piirrä tasoon ekvivalenssiluokka $p(0,1)$.

$* * *$

Alkion (x,y) ekvivalenssiluokka koostuu niistä[1] alkioista (c,d) joille $f(x,y) = f(c,d)$. Näiden joukko on

$$p(x,y) = \{(c,d) \mid |c-d| = |x-y|\},$$

so. ne (c,d) joille $d = c \pm |x-y|$; kukin ekvivalenssiluokka koostuu kahdesta suorasta. Erityisesti $p(0,1)$ koostuu suorista $y = x+1$ ja $y = x-1$; katso ao. kuva.



Kuva 1. Ekvivalenssiluokka $p(0,1)$ (kaksi suoraa)

Kanoninen hajotelma on ekvivalenssiluokkafunktio p yhdistettynä funktioon f^* ekvivalenssiluokilta $\mathbb{R}$:lle; $f^* : \mathbb{R}^2/R_f \to \mathbb{R}$. Hajotelmalle pätee $f = f^* \circ p$. (Siispä: p kuvaa pisteen $(0,1)$ ekvivalenssiluokalle $p(0,1)$ eli kaikkien niiden pisteiden joukolle joiden kuva kuvauksen f suhteen on sama kuin pisteen $(0,1)$. f^*

[1]Huomaa että tässä kirjoitetaan $p(x,y)$ ja tarkoitetaan "alkion (x,y) kuva kuvauksen p suhteen"; ollen suunnattoman tarkka ja matemaattinen tämä tulisi kirjoittaa $f((x,y))$ ja samoin p:lle, mutta käytettyä lyhennysmerkintää $f(x,y)$ käytetään lyhyyden ja selvyyden vuoksi.

yhdistää tämän ekvivalenssiluokan (kaksi suoraa $\mathbb{R}^2$:ssa) niiden yhteiselle kuvalle, joka on $1 \in \mathbb{R}$.)

(2) Olkoon X avaruus ja $A \subset X$. Jatkuva kuvaus $r : X \to A$ on *retraktio*, jos $r \mid_A = \mathrm{id}$, eli $r(x) = x$ kun $x \in A$. Osoita, että retraktio on aina samaistuskuvaus.

$* * *$

Olkoon f retraktio. Funktio on samaistuskuvaus jos se on surjektio ja se indusoi alkuperäisen topologian.

Koska maalijoukko on A, on f surjektio: jokaisella $x \in A$ on alkukuva, nimittäin piste x itse. (Luultavasti enemmänkin alkukuvia koska joukon $X \setminus A$ täytyy kuvautua jonnekin joukolle A; mutta ainakin yksi alkukuva pistettä kohden riittää.)

Nyt f indusoi alkuperäisen topologian, mikäli pätee että V on avoin Y:ssä jos ja vain jos $f^{-1}(V)$ on avoin X:ssä.

Olkoon ensin $V \subset A$ avoin A:ssä. Eräs jatkuvuuden kanssa ekvivalenteista ehdoista (Lause 2.2) on, että avoimien joukkojen alkukuvat ovat avoimia; koska f on jatkuva, niin $f^{-1}(V)$ on avoin X:ssä.

Jos nyt merkitään maalipään topologiaa T ja indusoitua topologiaa T_i, niin edellisen päättelyn nojalla tiedetään että $T \subset T_i$. Indusoitu topologia on siis sama kuin maalipään topologia ($T = T_i$) tai hienompi ($T \subset T_i$ aidosti). Kuitenkin tiedetään (Lause 3.2) että indusoitu topologia T_i on kaikkein karkein topologia jolla f on jatkuva. Koska f on jatkuva maalipään topologiassa T, niin maalipään topologia on hienompi kuin indusoitu topologia ($T_i \subset T$) tai sama ($T_i = T$). Kummassakin tapauksessa $T_i = T$.

Tähän tehtävään voi olla muitakin ratkaisutapoja. (Niin voi olla kaikkiin muihinkin tehtäviin, mutta tämä vaikuttaa erityisen monella tavalla ratkaistavalta.)

(3) Avaruuden X *kartio* $c(X)$ on avaruus $(X \times I)/(X \times \{1\})$. Osoita, että $c(S^{n-1}) \approx \overline{B}^n$.

Tässä S^{n-1} on n-ulotteinen yksikköpallo,

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\},$$

$\overline{B}^n$ on suljettu yksikkökuula,

$$\overline{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\},$$

ja I on yksikköväli, $I = [0, 1]$.

* * *

Merkinnällä $A \approx B$ tarkoitettiin, että on olemassa homeomorfismi $f : A \to B$.

Nyt lähtöjoukko on $(S^{n-1} \times I)/(S^{n-1} \times \{1\})$; kauttaviiva merkitsee sitä, että on kyse tekijätopologiasta, siis joukosta jonka alkiot ovat $S^{n-1} \times \{1\}$ ja kaikki joukon $(S^{n-1} \times I) \setminus (S^{n-1} \times \{1\})$ yksiöt.[2] (Eli, lisäselittelynä, joukko $S^{n-1} \times \{1\}$ on ikään kuin kutistettu vain yhdeksi joukon pisteeksi muiden joukon pisteiden joukkoon.)

Maalijoukko puolestaan on $\overline{B}^n$, eli n-ulotteinen pallo.

Tällaisen homeomorfismin löytäminen on ”helppoa”.

Joukot $S^{n-1} \times \{\epsilon\}$, $\epsilon \in [0, 1)$, ovat ”n-ulotteisia pallokuoria joilla on yksi ylimääräinen koordinaatti ϵ”. Tuo koordinaatti voidaan tulkita pallokuorta skaalaavaksi suhteeksi: jos $x \in \mathbb{R}^n$ ja $(x, \epsilon) \in S^{n-1} \times \{\epsilon\}$, niin kuvataan piste (x, ϵ) joukon $\overline{B}^n \setminus \{0\}$ pisteelle $(1 - \epsilon)x$. Tällöin $S^{n-1} \times \{0\}$ kuvautuu itselleen, tavalliselle yksikköpallon kuorelle. Mitä suurempi ϵ on, sitä pienemmille sisäkkäisille pallokuorille $S^{n-1} \times \{\epsilon\}$ kuvautuu. Kun lopuksi kuvataan pisteeksi luhistettu joukko $S^{n-1} \times \{1\}$ n-ulotteiselle origolle 0, on aikaan saatu kuvaus joka ”selvästikin” on homeomorfismi: homeomorfismi on esim. jatkuva bijektio jonka käänteisfunktio on jatkuva, ja näin määritelty funktio on selvästikin näin säännöllinen.

(Konkreettinen kuvausesimerkki. Olkoon $n = 3$. Piste $(1, 0, 0, \epsilon) \in S^{n-1} \times I$ kuvautuu pisteelle

$$(1 - \epsilon)(1, 0, 0) = (1 - \epsilon, 0, 0) \in \overline{B}^n;$$

lähtöpuolen yksikköpallokuorta ikään kuin kutistetaan $(1-\epsilon)$:in verran ja päädytään yksikköpallon sisällä olevaan pisteeseen. Ottamalla kaikki tällaiset kutistukset $\epsilon \in [0, 1)$ saadaan kaikki pisteet pisteen $(1, 0, 0)$ ja origon väliltä; arvolla $\epsilon = 1$ koko pallokuori $S^{n-1} \times \{1\}$ on luhistettava yhdeksi pisteeksi sillä ”nollasäteinen pallo on pelkkä piste”.)

[2] Mainittakoon aivan kaiken varalta että $(S^{n-1} \times I) \setminus (S^{n-1} \times \{1\})$ on ”joukko $(S^{n-1} \times I)$ josta otetaan pois joukko $S^{n-1} \times \{1\}$”; muuten voi tulla sekaannusta erilaisten kauttaviivojen kanssa.