Topologia
Syksy 2010
Harjoitus 8

(1) Avaruuden X *suspensio* $S(X)$ on avaruus $(X \times [-1,1])/R$, missä R:n luokkia ovat $X \times \{1\}$, $X \times \{-1\}$, ja yksiöt $\{a\}$ kun $a \in X \times (-1,1)$.
a) Osoita, että $S(S^{n-1}) \approx S^n$.
b) Hahmottele a-kohdan merkitystä kun $n = 1$ ja kun $n = 2$.
Tässä S^{n-1} on n-ulotteinen yksikköpallo,

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}.$$

Vihje: Edellisten harjoitusten tehtävä 3.

* * *

On siis löydettävä homeomorfismi, "jatkuva bijektio jonka käänteisfunktio on jatkuva" $S(S^{n-1}) \to S^n$. Mutta kuten edellisten harjoitusten kartiotehtävä, tämänkin olemassaolo on helppo hahmottaa. Joukko S^{n-1} on n-ulotteinen pallokuori; kun siihen lisätään yksi ylimääräinen koordinatti joukosta $[-1,1]$, päästään samaan määrään koordinaatteja kuin $(n+1)$-ulotteisella pallokuorella S^n. Suspension ajatus on, että "pinoamalla" n-ulotteisia olioita päällekkäin $[-1,1]$-koordinaatin suhteen saadaan $(n+1)$-ulotteinen olio.

Tapauksessa $n = 1$ joukko S^0 koostuu pisteistä $x \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ joille $|x| = 1$. Näitä ovat 1 ja -1, eli $S^0 = \{-1, 1\}$. Yhdistämällä joukko

$$S^0 \times [-1,1] = \{-1,1\} \times [-1,1]$$

pallokuorelle $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ (tason ympyrä) säännöllä

$$f(x,y) = (x \cos \frac{\pi y}{2}, \sin \frac{\pi y}{2})$$

saadaan aikaan homeomorfismi.[1]

Tämän kuvauksen helpommin ymmärrettävä ajatus on tämä: ajatellaan että koordinaatti $\{-1,1\}$ vastaa tason ympyrän vasenta ja oikeaa puolta; tässä -1 vasenta ja 1 oikeaa. Koordinaatti $[-1,1]$ vastaa sitä, mitä y-koordinaattia vastaavassa pisteessä ympyrällä ollaan; kutakin y-koordinaattia $(-1,1)$ vastaa

[1]Nämä pisteet ovat ympyrällä, koska

$$\left(x \cos \frac{\pi y}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi y}{2}\right)^2 = 1$$

koska $|x| = 1$.

kaksi pistettä ympyrällä, yksi vasemmalla ($x < 0$) ja yksi oikealla ($x > 0$) puolella. Pisteissä jossa ympyrän puolet kohtaavat toisensa, $(0, 1)$ ja $(0, -1)$, nämä pisteet sulavat yhdeksi, joten niille kuvautuvat pisteet myös sulautetaan yksiksi pisteiksi. Koska $f(1, 1) = f(-1, 1) = (0, 1)$, niin käsitellään joukkoa $\{-1, 1\} \times \{1\} = S^0 \times \{1\}$ yksittäisenä pisteenä.

Tapauksessa $n = 2$ laitetaan tason ympyröitä "päällekkäin" kolmannen koordinaatin suhteen, ja "kutistamalla" niitä sopivalla kuvauksella saadaan pallokuori; kuoren "päällimmäisin" ja "pohjimmaisin" pallo on kuitenkin taas sulautettava yksittäisiksi pisteiksi.

(2) Osoita, että tekijäryhmän

$$\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{\ \{x + q \mid q \in \mathbb{Q}\}\ \mid\ x \in \mathbb{R}\ \}$$

tekijätopologia on minitopologia. (Minitopologia koostuu tyhjästä joukosta ja kaikkien alkioiden muodostamasta joukosta.)

* * *

Tekijätopologia on projektion koindusoima; so. joukko on avoin jos ja vain jos sen alkukuva on avoin. Millaisia ovat joukon $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ joukot? Joukon $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ yksittäiset alkiot ovat muotoa

$$\{x + \mathbb{Q} \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x, x + 1, x + \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}, \ldots\},$$

eli "reaaliluku plus kaikki mahdolliset rationaaliluvut"; yksi tällainen x-joukko on joukossa $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ alkio eli "yksi piste". Tällaisten alkioiden kokoelmat ovat joukon $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ joukkoja; ja nämä joukot ovat avoimia jos niiden alkukuva projektien suhteen on avoin.

Olkoon esimerkin vuoksi $x = 0$. Tätä x:n arvoa vastaa joukko $\{0 + q \mid q \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$, rationaalilukujen joukko, siis $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. (Huomaa että $\mathbb{Q}$ on $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$:n alkio, ei osajoukko!) Tämän alkion muodostaman joukon alkukuva ovat ne luvut jotka kuuluvat siihen, siis joukko $\mathbb{Q}$ itse. Tiedetään että *joukko* $\mathbb{Q}$ ei ole reaaliakselin tavallisessa topologiassa avoin. Siispä sen kuva $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$-projektion suhteen, *alkio* $\mathbb{Q}$ ei yksinään ole avoin joukko tekijätopologiassa.

Jos taas valitaan $x = 1$, saadaan alkio/joukko $\{1 + q \mid q \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$; huomaa että "$x$:n arvoa 0 vastaava x-joukko" ja "x:n arvoa 1 vastaava x-joukko" ovat yksi ja sama.

Jos $x = \pi$ niin $\{\pi + q \mid q \in \mathbb{Q}\}$, joka ei sievene. Koska rationaalilukujen joukko ei ole avoin, niin ei myöskään "π:n verran oikealle siirretty" rationaalilukujen joukko ole avoin.

Näiden huomioiden jälkeen itse tehtävä.

Väitetään, että jos $U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ niin että on olemassa yksikin $x_0 \in \mathbb{R}$ siten, että $\{x_0 + q \mid q \in \mathbb{Q}\} \notin U$, eli yksikin joukon $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ alkio joka ei kuulu joukkoon U, niin U ei ole avoin. Jos tämä saadaan osoitettua, niin vain $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ja $\emptyset$ ovat mahdollisia ja näin ollen ainoita avoimia joukkoja.

Tarkastellaan maalipuolen joukkoa U alkukuvanaan eli samat luvut (vaan ei samat alkiot) sisältävänä reaaliakselin joukkona. Olkoon $x \in \mathbb{R}$, $x \in U$. Tällöin voidaan valita alkoita $x_0 + q$, $q \in \mathbb{Q}$, mielivaltaisen läheltä pistettä x.[2] Tällöin U ei ole (tavallisessa topologiassa) avoin pisteessä x koska sen jokaisesta (tavallisen topologian) ympäristöstä löytyy ei-U piste, joten U ei ole avoin.

(3) Olkoon X jatkuvien funktioiden $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ joukko. Todista, että $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$ on pseudometriikka joukossa X. Onko se metriikka?

* * *

Olkoon $f, g, h \in X$. Nyt d on pseudometriikka koska se toteuttaa ehdot (1)–(3):

(1) : $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$, sillä

$$\begin{aligned} d(f,h) &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - h(x)| \\ &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x) - h(x)|. \end{aligned}$$

(2) : Selvästikin $d(f,g) = d(g,f)$.

(3) : Samoin selvästikin $d(f,f) = 0$.

Käsiteltävä d on myös metriikka, sillä se toteuttaa ehdon (4):

(4) : Jos $d(f,g) = 0$, niin $f = g$. Tämä pätee, sillä jos $d(f,g) = 0$ niin $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$, joten

$$0 \geq |f(x) - g(x)| \geq 0$$

kaikilla $x \in [0,1]$, ensimmäinen epäyhtälö d:n nojalla, ja toinen itseisarvon ominaisuutena; tästä seuraa, että $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in [0,1]$.

[2] Tunnettu rationaalilukujen ominaisuus: kaikille $x, x_0 \in \mathbb{R}$ voidaan löytää jono lukuja $q_n \in \mathbb{Q}$ s.e. $q_n \to x - x_0$.