Topologia
Syksy 2010
Harjoitus 9

(1) Avaruuden X osajoukko A on G_δ-joukko, jos se on numeroituva leikkaus avoimista joukoista ja F_σ-joukko, jos se on numeroituva yhdiste suljetuista joukoista. Osoita, että metristyvässä avaruudessa jokainen suljettu joukko on G_δ, ja avoin joukko F_σ.

Vihje: Tarkastele joukkoja

$$\{x \in X \mid d(x, A) < 1/n\}.$$

Tässä $d(x, A)$ on "pisteen x ja joukon A etäisyys metriikan d mielessä", eli $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.

* * *

Olkoon A suljettu. Vihjeen joukot ovat metristyvässä avaruudessa avoimia.[1] Niiden numeroituva leikkaus $n \in \mathbb{N}$ on niiden pisteiden x joukko, joille $d(x, A) < 1/n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, eli $d(x, A) = 0$; tällaisten pisteiden joukko on A ja sen reuna, ja koska A on suljettu, on tämä A itse.

Olkoon A avoin. Joukot $\{x \mid d(x, X \setminus A) < 1/n\}$ ovat avoimia, joten niiden komplementit ovat suljettuja. Näiden komplementtien numeroituva yhdiste lukujen $\mathbb{N}$ yli on

$$\begin{aligned} &\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X \setminus \{x \mid d(x, X \setminus A) < 1/n\} \\ =&\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \mid d(x, X \setminus A) \geq 1/n\} \\ =&A, \end{aligned}$$

joten A on F_σ-joukko. (Komplementit ovat joukkoja pisteitä jotka ovat "ainakin näin kaukana A:n ulkopuolisesta osasta"; kun tätä etäisyyttä pienennetään kaikki A:n pisteet paitsi A:n reuna (x s.e. $d(x, X \setminus A) = 0$) tulevat yhdisteeseen, ja koska A ei avoimena joukkona sisällä reunapisteitään, on yhdiste A.)

[1] Voi tarvittaessa perustella esimerkiksi näin: Merkitään $C = \{x \in X \mid d(x, A) < 1/n\}$. Koska avaruus on metristyvä, niin metriikan määräämät pallot ovat avoimia joukkoja. Jos otetaan joukon A kaikkien pisteiden yli yhdiste niiden $1/n$-säteisistä palloista, tulos on (a) avoin joukko ja (b) joukko C itse.

(2) Olkoon X metristyvä, $A \subset X$ ja $x \in \overline{A}$. Osoita, että on olemassa A:n pistejono, joka suppenee kohti x:ää.

* * *

X on metristyvä, eli sillä on topologia T ja metriikka d niin että metriikan d määräämät pallot $B(x,r)$,

$$B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\},$$

ovat topologian T virittävä kanta. Topologian mielessä suppeneminen tarkoittaa seuraavaa:

> Jono x_n suppenee kohti pistettä x (kirjoitetaan $x_n \to x$) jos jokaiselle pisteen x ympäristölle U on olemassa luku $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $x_n \in U$, kun $n \geq n_0$.

Jos nyt pitää löytää pistejono $x_n \to x$, niin pitää siis löytää pistejono x_n siten, että jokaiselle pisteen x ympäristölle U on olemassa riittävän suuri n siten, että siitä n:n arvosta lähtien $x_n \in U$.

Olkoon x_n jono, joka saadaan poimimalla jokaisesta pallosta $B(x, 1/n)$ jokin joukon A piste.[2] Olkoon U mielivaltainen x:n ympäristö. Väitetään, että on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $x_n \in U$ kun $n \geq n_0$.

Jos tämä väite ei pätisi, niin olisi mv. suuria n:n arvoja siten, että $x_n \in B(x, 1/n)$ mutta $x_n \notin U$. Mutta tiedetään (esim. Kantakriteerio A) että avoimelle joukolle U ja sen pisteelle x on aina olemassa jokin kannan joukko B siten, että $x \in B \subset U$. Jos on mv. suuria n:n arvoja niin että $x_n \in B(x, 1/n)$ ja $x_n \notin U$, niin $B(x, 1/n)$-joukkojen sisäkkäisyyden takia mikään x-keskinen pallo ei käy joukoksi B, koska sille ei päde $B \subset U$.

Mutta mikään kannan pallo joka ei ole x-keskinen ei myöskään käy, koska jos se sisältäisi pisteen x, se sisältäisi myös riittävän pienet x-keskiset pallot.[3] Siis tällaista kantakriteerion mukaista kannan joukkoa B ei ole mutta pallot ovat silti kanta; tämä on ristiriita, joten väite pätee.

---

[2] Tämä jono on hyvin määritelty, koska: Koska x on joukon A sulkeumassa, se on kosketuspiste, jonka määritelmä on että sen jokaisesta ympäristöstä voidaan poimia ainakin yksi A:n piste, mahdollisesti x itse. Ja pallot $B(x, 1/n)$ ovat tällaisia ympäristöjä eli avoimia joukkoja, koska X on metristyvä eli sen topologian kanta koostuu tällaisista palloista, jotka kannan alkioina ovat myös avoimia joukkoja.

[3] Sillä jos $x \in B(y,r)$ niin $d(x,y) < r$, eli $d(x,y) = r - \epsilon$ jollekin $\epsilon > 0$. Tällöin $B(x, \epsilon/2) \subset B(y,r)$. (Jos $z \in B(x, \epsilon/2)$ niin $d(x,z) < \epsilon/2$, joten $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) \leq r - \epsilon + \epsilon/2 < r$.)

Topologia
Syksy 2010
Välikoe 1

1. Aseta seuraavat reaaliakselin $\mathbb{R}^1$ topologiat karkeusjärjestykseen.
   $T_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}^1\}$
   T_2 : kaikista $\mathbb{R}^1$:n osajoukoista muodostuva topologia
   T_3 : reaaliakselin tavallinen topologia (eli avoimet välit (a, b) ja niiden yhdisteet)
   T_4 : välit $[a, b)$ muodostavat topologian kannan.

2. Millaisia avoimia joukkoja kuuluu (a, ∞)-topologian joukossa $[0, 1]$ määräämään relatiivitopologiaan? Mitä on $\overline{\{0\}}$ tässä topologiassa? Entä $\overline{\{0, 1\}}$?

3. Olkoon X ääretön avaruus, jonka kaikki äärettömät osajoukot ovat avoimia. Osoita, että X on diskreetti.

4. Olkoon X avaruus, $A \subset B \subset X$ ja A tiheä B:ssä. Osoita, että A on tiheä $\overline{B}$:ssa.

5. Olkoon X ja X' avaruuksia. Osoita, että kuvaus $f : X \to X'$ on suljettu, jos ja vain jos $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ kaikilla $A \subset X$.

Välikokeesta —

1. (Harjoitusten 2 tehtävä 1) Aseta seuraavat reaaliakselin $\mathbb{R}^1$ topologiat karkeusjärjestykseen.
   $T_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}^1\}$
   T_2 : kaikista $\mathbb{R}^1$:n osajoukoista muodostuva topologia
   T_3 : reaaliakselin tavallinen topologia (eli avoimet välit (a, b) ja niiden yhdisteet)
   T_4 : välit $[a, b)$ muodostavat topologian kannan. (1. harj. 2. teht. topologia)

   * * *

   Topologia T_a on *karkeampi* kuin topologia T_b, ja T_b *hienompi* kuin T_a, mikäli $T_a \subset T_b$. Karkeampi topologia on ”vähemmän tarkka työkalu” avaruuden mittaamiseen.

   Tiedetään luennoista että T_1 on kaikkein karkein reaaliakselin topologia, ja T_2 kaikkein hienoin. Harjoitusten nojalla tiedetään, että topologia T_4 sisältää kaikki avoimet välit ja niiden yhdisteet; näin ollen $T_3 \subset T_4$.

   Kokoamalla nämä palat yhteen saadaan seuraava sisäkkäisyys, karkein ensin ja hienoin viimeisimpänä: $T_1 \subset T_3 \subset T_4 \subset T_2$.

2. (Harjoitusten 3 tehtävä 3) Millaisia avoimia joukkoja kuuluu (a, ∞)-topologian joukossa $[0, 1]$ määräämään relatiivitopologiaan? Mitä on $\overline{\{0\}}$ tässä topologiassa? Entä $\overline{\{0, 1\}}$?

   * * *

   Koska $T_{(a,\infty)} = \{\emptyset, \mathbb{R}^1\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}^1\}$, niin

$$
\begin{aligned}
T_{(a,\infty)}\big|_{[0,1]} &= \{\emptyset, [0, 1]\} \cup \{(a, \infty) \cap [0, 1] \mid a \in \mathbb{R}^1\} \\
&= \{\emptyset, [0, 1]\} \cup \{(a, 1] \mid 0 \le a \le 1\}.
\end{aligned}
$$

   Suljetut joukot ovat näiden komplementteja, eli

$$
\{[0, 1], \emptyset\} \cup \{[0, a] \mid 0 \le a \le 1\}.
$$

   Näistä pienin joka sisältää joukon $\{0\}$ on $[0, 0] = \{0\}$, joten $\overline{\{0\}} = \{0\}$. Samoin $\overline{\{0, 1\}} = [0, 1]$.

3. Olkoon X ääretön avaruus, jonka kaikki äärettömät osajoukot ovat avoimia. Osoita, että X on diskreetti.

* * *

X on diskreetti jos sen jokainen osajoukko on avoin; tämän näyttämiseksi riittää näyttää että jokainen yksiö (yhden alkion joukko) on avoin. Tiedetään, että X voidaan kirjoittaa

$$X = \bigcup_{j \in J} \{x_j\}$$

missä J on ääretön indeksijoukko. Olkoon $J' \subset J$ siten, että J' ja $J \setminus J'$ ovat molemmat äärettömiä indeksijoukkoja.[4] Olkoon j_0 mielivaltainen indeksi, $j_0 \in J'$. Tällöin

$$\{x_{j_0}\} = \underbrace{\left(\bigcup_{j \in J'} \{x_j\} \right)}_{\text{ääretön osajoukko, joten avoin}} \bigcap \underbrace{\left(\{x_{j_0}\} \cup \bigcup_{j \in J \setminus J'} \{x_j\} \right)}_{\text{ääretön osajoukko, joten avoin}},$$

joten $\{x_{j_0}\}$ on avoin. Samoin jos $x_{j_0} \in J \setminus J'$, niin $\{x_{j_0}\}$ on avoin, joten X on diskreetti.

4. (Harjoitusten 4 tehtävä 6) Olkoon X avaruus, $A \subset B \subset X$ ja A tiheä B:ssä. Osoita, että A on tiheä $\overline{B}$:ssa.

* * *

Olkoon T avaruuden X topologia. Tällöin relatiivitopologiaan $T\,|_B$ kuuluva kaikki joukot $V \cap B$, missä $V \in T$. Koska A on tiheä B:ssä, tiedetään että jos D on ei-tyhjä topologian $T\,|_B$ avoin joukko, niin $A \cap D \neq \emptyset$. Olkoon C ei-tyhjä topologian $T\,|_{\overline{B}}$ avoin joukko. Tällöin relatiivitopologian määritelmän nojalla jollekin avoimelle joukolle $V \in T$ pätee $C = V \cap \overline{B}$, eli

$$C = (V \cap B) \cup (V \cap (\overline{B} \setminus B)).$$

Koska V on topologian T avoin joukko, niin $V \cap B \in T\,|_B$, joten $(V \cap B) \cap A$ on epätyhjä; näin ollen $C \cap A$ eli

$$\Big((V \cap B) \cup (V \cap (\overline{B} \setminus B)) \Big) \cap A$$

on epätyhjä.

[4]Ääretön joukko voidaan aina jakaa kahdeksi äärettömäksi joukoksi. Tämä on mahdollista luonnollisille luvuille, sillä sekä parilliset että parittomat luvut ovat ääretön joukko; ja mikä on mahdollista luonnollisilla luvuilla on mahdollista millä tahansa numeroituvasti äärettömällä joukolla. Ylinumeroituvasti äärettömästä joukosta J taas voidaan ottaa numeroituvasti ääretön osajoukko J', ja olla varmoja että $J \setminus J'$ on myös ääretön. (Ellei olisi, niin ristiriita!)

5. Olkoon X ja X' avaruuksia. Osoita, että kuvaus $f : X \to X'$ on suljettu, jos ja vain jos $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ kaikilla $A \subset X$.

$$* * *$$

"$\Rightarrow$" : Koska $A \subset \overline{A}$, niin pätee $f(A) \subset f(\overline{A})$. Koska $\overline{A}$ on suljettu joukko ja f on suljettu kuvaus (kuvaa suljetut joukot suljetuiksi joukoiksi) niin $f(\overline{A})$ on suljettu joukko. Näin ollen

$$\overline{f(A)} = \bigcap_{\substack{F \text{ suljettu} \\ f(A) \subset F}} F \subset f(\overline{A}).$$

"$\Leftarrow$" : Olkoon $A \subset X$ suljettu joukko. Tällöin $A = \overline{A}$, ja oletuksen nojalla $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A}) = f(A)$. Toisaalta triviaalisti $f(A) \subset \overline{f(A)}$, joten $f(A) = \overline{f(A)}$, joten $f(A)$ on suljettu joukko. Koska näin ollen f kuvaa mielivaltaisen suljetun joukon suljetulle joukolle, on se suljettu kuvaus.