Topologia
Syksy 2010
2. välikoe

(1) Olkoon $(d_i)_{i\in I}$ joukon E pseudometriikkaperhe siten, että

$$d(x,y) = \sup_{i\in I} d_i(x,y) < \infty$$

joukon E jokaisella alkioparilla. Todista, että näin määritelty funktio d on joukon E pseudometriikka ja että se on metriikka, jos yksikin pseudometriikoista d_i on metriikka.

(2) Osoita, että metristyvän avaruuden suljettu joukko A voidaan esittää numeroituvana leikkauksena avoimista joukoista. Vihje: Voit olettaa, että joukot $\{x \in X \mid d(x,A) < 1/n\}$ ovat avoimia.

(3) Olkoon X topologinen avaruus. Todista, että X on T_1-avaruus, jos ja vain jos mielivaltaisen pisteen $x \in X$ kaikkien ympäristöjen leikkaus supistuu pisteeksi x.

(4) Olkoon X separoituva metrinen avaruus. Olkoon Y avaruuden X jatkuva kuvajoukko, so. on olemassa jatkuva kuvaus $f : X \to Y$, missä $Y = f(X)$. Todista, että Y on separoituva.

(5) Onko $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ separoituva?

(1) Olkoon $(d_i)_{i\in I}$ joukon E pseudometriikkaperhe siten, että
$$d(x,y) = \sup_{i\in I} d_i(x,y) < \infty$$
joukon E jokaisella alkioparilla. Todista, että näin määritelty funktio d on joukon E pseudometriikka ja että se on metriikka, jos yksikin pseudometriikoista d_i on metriikka.

* * *

(1) Olkoon $i \in I$ mv. ja $x, y, z \in E$. Tällöin
$$\begin{aligned} &d_i(x,z) \\ \le &d_i(x,y) + d_i(y,z) \\ \le &\sup_{i\in I} d_i(x,y) + \sup_{i\in I} d_i(y,z) \\ = &d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$
Koska tämä pätee jokaiselle $i \in I$, niin
$$d(x,z) = \sup_{i\in I} d_i(x,z) \le d(x,y) + d(y,z).$$
(2) $d(x,y) = \sup_{i\in I} d_i(x,y) = \sup_{i\in I} d_i(y,x) = d(y,x)$.
(3) $d(x,x) = \sup_{i\in I} \underbrace{d_i(x,x)}_{=0} = 0$.

Oletetaan, että d_{i_0} on metriikka, ja $d(x,y) = 0$. Tällöin
$$0 \le d_{i_0}(x,y) \le \sup_{i\in I} d_i(x,y) = d(x,y) = 0,$$
joten $d_{i_0}(x,y) = 0$, ja koska d_{i_0} on metriikka, $x = y$.

(2) Osoita, että metristyvän avaruuden suljettu joukko A voidaan esittää numeroituvana leikkauksena avoimista joukoista. Vihje: Voit olettaa, että joukot $\{x \in X \mid d(x,A) < 1/n\}$ ovat avoimia.

* * *

Harjoitusten 9 tehtävän 1 ensimmäinen puolikas.

(3) Olkoon X topologinen avaruus. Todista, että X on T_1-avaruus, jos ja vain jos mielivaltaisen pisteen $x \in X$ kaikkien ympäristöjen leikkaus supistuu pisteeksi x.

* * *

"$\Rightarrow$" : **AT**. On olemassa $x_0 \in X$ siten, että jos $\{U^j_{x_0} \mid j \in J\}$ on pisteen x_0 kaikkien ympäristöjen joukko, niin
$$\{x,y\} \in \bigcap_{j\in J} U^j_{x_0}$$

jollekin $y \in X$, $y_0 \neq x$. Tällöin $y \in U_{x_0}^{j_0}$ jollekin $j_0 \in J$. Koska X on T_1-avaruus, on olemassa x_0:n ympäristö $U_{x_0}^{j_1}$, $j_1 \in J$ siten, että $y \notin U_{x_0}^{j_1}$ — mutta tällöin $y \notin \bigcap_{j \in J} U_{x_0}^{j}$, koska

$$\bigcap_{j \in J} U_{x_0}^{j} \subset U_{x_0}^{j_1}.$$

Tämä on ristiriita; väite seuraa.

"$\Leftarrow$" : Olkoot $x \neq y$. Oletuksesta seuraa, että

$$\bigcap_{j \in J} U_x^j = \{x\},$$

missä $\{U_x^j \mid j \in J\}$ on x:n kaikkien ympäristöjen joukko. Erityisesti on olemassa ympäristö $U_x^{j_0}$ siten, että $y \notin U_x^{j_0}$. Vastaavasti

$$\bigcap_{k \in K} U_y^k = \{y\},$$

ja on olemassa ympäristö $U_y^{k_0}$ siten, että $x \notin U_y^{k_0}$. Näin ollen X on T_1-avaruus.

(4) Olkoon X separoituva metrinen avaruus. Olkoon Y avaruuden X jatkuva kuvajoukko, so. on olemassa jatkuva kuvaus $f : X \to Y$, missä $Y = f(X)$. Todista, että Y on separoituva.

$* * *$

Olkoon $\{x_n\} \subset X$ tiheä osajoukko. Osoitetaan, että $\{y_n\} = \{f(x_n)\} \subset Y$ on tiheä. Olkoon V avoin joukko, $\emptyset \neq V \subset Y$. Koska f on jatkuva niin $U = f^{-1}(V) \subset X$ on avoin. Koska $\{x_n\}$ on tiheä joukossa X, niin on olemassa $x_{n_0} \in U$, joten $y_{n_0} = f(x_{n_0}) \in V$. Näin ollen $\{y_n\}$ on tiheä Y:ssä.

(5) Onko $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ separoituva?

$* * *$

Harjoitusten 12 tehtävä 2.