Algebra, syksy 1999

Kotitehtävät 1 (palautettava ti 21.9.1999 klo 12 mennessä)

Algebralaisten vastaanotto on ti 9-10 M365, eikä maanantaina.
Matematiikan laitos järjestää kotilaskujen ohjausta viikoilla 37-49 salissa M9 ma 14-18, ti 16-18 ja ke 14-16. Ohjaajina toimivat Ville Ramula ja Marko Kotilainen. Algebralaiset pyrkiköōt kuitenkin ISETL-asioissa turvautumaan omaan opettajaan!

---

1. Vastatkaa tähän tehtävään erilliselle paperille (jota en palauta!).
a) Keksikää ryhmällenne lyhyt ja ytimekäs kutsumanimi, ja kirjoittakaa se ja ryhmän jäsenten nimet paperin alkuun.
b) Kirjoittakaa paperille ainakin kaksi algebraa, ISETL-työskentelyä tai muuta tekniikkaa koskevaa kysymystä, joita haluaisitte luokkatunnilla käsiteltävän.

2. Osoita, että jos $a \in \mathbf{Z}$, niin a^2 on joko muotoa $3k$ tai $3k+1$ jollekin kokonaisluvulle k, mutta ei koskaan muotoa $3k+2$.
Opastus: Jakoyhtälön mukaan $a \in \mathbf{Z}$ on aina muotoa $3q$, $3q+1$ tai $3q+2$.

3. Osoita, että parittoman luvun neliö voidaan aina esittää muodossa $8k+1$ jollakin $k \in \mathbf{Z}$.
Vihje: mitä voidaan sanoa kahden peräkkäisen luvun tulosta?

4. Olkoot a, b ja n kokonaislukuja. Osoita, että luvuilla a ja b on sama jakojäännös jaettaessa luvulla n, jos ja vain jos on olemassa $k \in \mathbf{Z}$, jolle $a - b = nk$.
Opastus: Kirjoita jakoyhtälön mukainen esitys luvuille a ja b, kun ne jaetaan luvulla n.

5. Olkoot a, b ja c kokonaislukuja. Osoita, että jos $a \mid b$ ja $b \mid c$, niin $a \mid c$.
Muistutus: $a \mid b$ tarkoitti, että $b = ka$ jollakin $k \in \mathbf{Z}$.

6. Olkoot a, b ja c kokonaislukuja.
a) Onko totta, että jos $a \mid b$ ja $a \mid c$, niin $a \mid (b+c)$? Jos on, niin todista se. Jos ei, niin etsi vastaesimerkki.
b) Onko totta, että jos $a \mid (b+c)$, niin $a \mid b$ tai $a \mid c$? Jos on, niin todista se. Jos ei, niin etsi vastaesimerkki.

Todistamisesta

Matematiikassa *todistamisessa* on pääasiassa kyse loogisesta päättelystä, ei siis mistään mystisestä asiasta, johon tarvittaisiin paljon erikoistietoja. Päättelyssä käytetään hyväksi käsitteiden määritelmiä ja aikaisemmin todistettuja asioita. Joskus todistamisessa käytetään hyväksi myös sellaisia asioita, joita *ei sillä kurssilla* ole aikaisemmin todistettu. Kyse on usein sellaisista asioista, jotka ovat hyvin tunnettuja lukujen ominaisuuksia ja kuulostavat miltei itsestäänselvyyksiltä. Esimerkiksi Lemman (Apulauseen) 1.4 kohdan 5 todistuksessa käytetään hyväksi tietoa, että jos k on kokonaisluku ja $k \neq 0$, niin silloin $|k| \geq 1$.
On hyvä tapa kirjoittaa todistukseen, mitä aikoo tehdä, varsinkin jos aikoo todistaa jonkun pienemmän asian, joka ei varsinaisesti vielä todista koko väitettä vaan on vain yksi askel todistuksessa. Pelkkä kasa symboleita ei ole todistus! Kyse on ennemminkin asian perustelemisesta, ja ethän sinä perustellessasi asioita lataa näytille pelkkiä numeroita ja symboleita, vaan selostat mitä milläkin tehdään ja miksi.

jatkuu ...

Jos-ja-vain-jos-todistus. Jos väite on muotoa "A jos ja vain jos B" eli $A \Leftrightarrow B$, niin väite yleensä todistetaan kahdessa palassa:

1. Todistetaan että jos A on tosi niin B on tosi.
2. Todistetaan että jos B on tosi niin A on tosi.

Esimerkiksi tehtävässä 4 väitetään, että luvuilla a ja b on sama jakojäännös jaettaessa luvulla n, jos ja vain jos on olemassa $k \in \mathbf{Z}$, jolle $a - b = nk$.
Nyt lause A olisi "Luvuilla a ja b on sama jakojäännös jaettaessa luvulla n", ja osa B olisi "On olemassa $k \in \mathbf{Z}$, jolle $a - b = nk$".
Todistuksessa olisi siis kaksi palaa: ensin todistetaan, että A:sta seuraa B eli että

JOS luvuilla a ja b on sama jakojäännös jaettaessa luvulla n, NIIN on olemassa $k \in \mathbf{Z}$, jolle $a - b = nk$.

Sitten todistetaan, että B:stä seuraa A, eli että

JOS on olemassa $k \in \mathbf{Z}$, jolle $a - b = nk$, NIIN luvuilla a ja b on sama jakojäännös jaettaessa luvulla n.

Epäsuora todistus. Epäsuoraa todistusta voi käyttää väitteen "Jos A, niin B" eli $A \Rightarrow B$ todistamiseen. Siinä pyritään osoittamaan, että B:n negaatiosta seuraa jokin epätosi väite, eli saadaan aikaan ristiriita. Toisin sanoen pyritään osoittamaan, että $\neg B \Rightarrow \neg R$ (B:n negaatiosta seuraa R:n negaatio), missä R on jokin tosi lause. Usein R on sama kuin A. Esimerkiksi jakoyhtälön todistuksessa on seuraavanlainen kohta:

> Todistetaan nyt, että $r < b$.
>
> Tehdään vastaoletus: $r \geq b$. Silloin luku $a - b(q+1) \in S$, sillä
>
> $$a - b(q+1) = (a - bq) - b = r - b,$$
>
> ja koska $r - b \geq 0$, on myös $a - b(q+1) \geq 0$. Mutta koska b on positiivinen, $r - b < r$. Siispä
>
> $$a - b(q+1) = r - b < r,$$
>
> mikä osoittaisi, että $a - b(q+1)$ olisi pienempi kuin r. Mutta r on joukon S pienin alkio, ja näin on saatu ristiriita. Siispä on oltava $r < b$.

Siinä todistetaan väite "JOS kaikki edelläsanottu on voimassa, NIIN $r < b$". Todistuksessa osoitetaan itse asiassa, että "JOS $r \leq b$, NIIN r ei olekaan joukon S pienin alkio, vastoin edellä sanottua". Todistettava väite on siis muotoa "Jos A niin B", ja alussa tehdään vastaoletus $\neg B$ eli lähdetään liikkelle olettamuksesta "$r \geq b$". Hetikohta päädytään ristiriitaan aikaisemmin olleen väitteen kanssa, ja näin voidaan päätellä, että $r < b$.
Epäselvyyksiä luentomonisteessa tai jossakin muussa asiassa?
Tule kysymään (M365) tai lähetä postia (`Martti.Pesonen@joensuu.fi`).