Algebra, syksy 1999

Kotitehtävät 3 (palautettava to 7.10.1999 klo 10 mennessä)

1. Selvitä ilman laskinta, millä luvuista 3, 5, 11 on jaollinen
a) 30083625.
b) 807011455704608.

2. Mitä on $5^{2\,000\,000} \bmod 24$?

3. Jos $k \equiv 1 \pmod 4$, niin minkä luvuista 0, 1, 2, 3 kanssa kongruentti modulo 4 on luku
a) $6k + 5$?
b) $2k^3 + k + 3$?

4. Ratkaise yhtälöt
a) $58x \equiv 2 \pmod{33}$.
b) $58x \equiv 2 \pmod{32}$.

5. Mitkä seuraavista operaatioista/säännöistä **eivät** ole laskutoimituksia eli binäärioperaatioita? Miksi?
a) Vokaalien joukossa: $v_1 \bullet v_2$ on se vokaaleista v_1, v_2, joka on aakkosissa myöhempänä.
b) Vokaalien joukossa: $v_1 \bullet v_2$ on se vokaali, joka on aakkosissa näiden välissä.
c) Vokaalien joukossa: $v_1 \bullet v_2$ on se vokaali, joka on aakkosissa seuraava v_1:n jälkeen, mikäli sellainen on, muutoin u.
d) Vokaalien joukossa: $v_1 \bullet v_2$ on se kirjain, joka on aakkosissa seuraava v_1:n jälkeen, mikäli sellainen on, muutoin u.

6. Mitkä seuraavista operaatioista/säännöistä **eivät** ole laskutoimituksia eli binäärioperaatioita? Miksi?
a) Parittomien kokonaislukujen joukossa: lukupariin liitetään niiden keskiarvo.
b) Rationaalilukujen joukossa: lasketaan kolmen luvun tulo.
c) Reaalilukujen joukossa: $a \circ b = \frac{a+2b}{a}$.
d) Luonnollisten lukujen joukossa: $n \otimes m$ on 5.
e) Ei-negatiivisten reaalilukujen joukossa: Luku kerrotaan kolmella.

7. Olkoon $*$ rationaalilukujen joukon laskutoimitus, jolle

$$x * y = \frac{x + y - xy - 2}{3}.$$

Onko $*$ liitännäinen? Vaihdannainen? Onko sillä neutraalialkio? Löytyykö kaikille joukon $\mathbf{Q}$ alkioille käänteisalkiot laskutoimituksen $*$ suhteen?

8. ISETL-demoissa aloitettiin laskutoimituksen ominaisuuksia testaavien funktioiden kehittely, osa seuraavista siis on jo tehty.

Kirjoita seuraavat seitsemän ISETL-funktiota samaan tiedostoon ja tuo mukaan ensi viikon ISETL-harjoituksiin. Voit tehdä tiedoston millä tahansa tekstieditorilla kuten NOTEPADilla tai WORDilla. Saa sen tehtyä ISETLilläkin. Voit käyttää hyväksesi viime ISETL-harjoituksissa tehtyjä funktioita ja ISETL-harjoitusten tehtäväpaperista löytyviä funktioita. Älä jätä kyseiseen tiedostoon kehotemerkkejä, ne voi ISETLissä poistaa ennen tallettamista Edit-valikosta Deprompt.
Anna tiedostolle nimi `ryhma.ise`. Kotitehtäväpaperiin ei tästä tehtävästä tarvitse kirjoittaa mitään. **Käytä alla olevia nimiä, älä keksi omia lyhenteitä!**
a) `suljettuko`, jonka syötteenä on joukko G ja kahden muuttujan funktio o, ja joka tutkii, ovatko alkiot `a .o b` joukon G alkioita kaikilla `a,b in G`.

b) `liitannainenko`, jonka syötteenä on joukko G ja laskutoimitus o ja joka tutkii, onko laskutoimitus o liitännäinen joukossa G.
c) `vaihdannainenko`, jonka syötteenä on joukko G ja laskutoimitus o ja joka tutkii, onko laskutoimitus o vaihdannainen joukossa G.
d) `neutraalialkioko`, jonka syötteenä on joukko G ja laskutoimitus o ja joka tutkii, onko laskutoimituksella o neutraalialkiota joukossa G.
e) `neutraali`, jonka syötteenä on joukko G ja laskutoimitus o ja palauttaa laskutoimituksen o neutraalialkion joukossa G.
f) `kaanteisalkiotko`, jonka syötteenä on joukko G ja laskutoimitus o ja joka tutkii, onko kaikilla joukon G alkioilla käänteisalkioita laskutoimituksen o suhteen joukossa G.
g) `kaanteis`, jonka syötteenä on joukko G, laskutoimitus o ja alkio g, ja joka palauttaa alkion g käänteisalkion laskutoimituksen o suhteen.

Tiedoston `ryhma.ise` saa sitten ISETLissä käyttöön komennolla `!include ryhma.ise`

Ilmoituksia

1) Ilmeisesti tiistaina 5.10.1999 ei luokkatuntia pidetä. Samoin ei ole vastaanottoja, mutta algebralaisille olkoon vastaanotto vaikkapa ke 6.10.1999 klo 10-11.
2) ISETL-demot 7.10. klo 14-16 ovat luokassa M15 (3 kerros, matikan kanslian luona).
3) **Eka testi.** Ensi viikon perjantaina 8.10.1999 pidämme pistokkaat eli pienen testin, joka tehdään yksilöittäin. Aiheet ovat
- jakoyhtälö
- jaollisuus
- alkuluvut
- suurin yhteinen tekijä
- kongruenssi
- laskutoimitus

Testi keskittyy käsitteiden määritelmiin ja on monivalintatesti. Siihen ei siis tule mitään todistustehtäviä.

Esimerkkitehtävä:
Jos $a \equiv 5 \pmod 7$, niin
a) $5 \mid (7 - a)$
b) $a \bmod 7 = 5$
c) $5 \equiv a \pmod 7$
d) $a + 4 \equiv 2 \pmod 7$
e) $2a \equiv 14 \pmod 5$
(oikeita ovat b, c ja d)

4) Ratkaisemanne ISETL-tehtävät (istuntojen lokikirjat, esim. 1HarjT3.ise) tuokaa vaikkapa disketillä minulle **neljänsien ISETL-demojen** ja **kolmansien kotilaskujen** jälkeen, siis kukin ryhmä yhtenä kappaleena. Niissä pitää olla myös tässä paperissa mainittu tiedosto `ryhma.ise` vaadittuine funktioineen.