Algebra, syksy 1999

Kotitehtävät 4 (palautettava to 14.10.1999 klo 12 mennessä)

Ilmoituksia takana.

1. Onko totta: Jos $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$, niin joko $a \equiv b \pmod{m}$ tai $a \equiv -b \pmod{m}$.

2. Mitkä seuraavista operaatioista/säännöistä **eivät** ole laskutoimituksia eli binäärioperaatioita? Miksi?
a) Permutaatioiden joukossa S_3: $[a,b,c] \circ [d,e,f] := [a,e,c]$
b) Permutaatioiden joukossa S_3: $[a,b,c] \circ [d,e,f] := [a,b,c]$
c) Permutaatioiden joukossa S_3: $[a,b,c] \circ [d,e,f] := [a+d,b+e,c+f]$
d) Tasovektorien joukossa $\mathbf{R}^2$: Kierretään molempia vektoreita $90°$ astetta vastapäivään.
e) Tasovektorien joukossa $\mathbf{R}^2$: Lisätään 1. vektoriin toisen pituinen x-akselin suuntainen vektori.
f) Tulos on vektori, joka on yhtä pitkä kuin molemmat vektorit yhteensä.

3. Mitkä edellä olevista kohdista, joissa todella oli kyseessä laskutoimitus, ovat vaihdannaisia, mitkä liitännäisiä?

4. Keksi johonkin epätyhjään joukkoon G sellainen uusi laskutoimitus, joka on
a) vaihdannainen muttei liitännäinen
b) liitännäinen muttei vaihdannainen.

5. Missä edellisten kotilaskujen 3 tehtävässä 5 (vokaalit) olevista kohdista, joissa *oli* kyseessä laskutoimitus, on olemassa neutraalialkio, ja missä niistä jopa käänteisalkioita?

6. Olkoon $A = \{a,b,c,d\}$ neljän alkion joukko ja olkoon F_A niiden funktioiden joukko, joiden määrittely- ja arvojoukkona on joukko A. Olkoon $\circ$ normaali funktioiden yhdistämisoperaatio.

a) Mikä on laskutoimituksen $\circ$ neutraalialkio?
b) Olkoon $g : A \to A$ seuraavanlainen:
$g(a) = b$, $g(b) = c$, $g(c) = b$ ja $g(d) = a$,
sekä $h : A \to A$ siten, että
$h(a) = c$, $h(b) = b$, $h(c) = a$ ja $h(d) = b$.
Mitä on $g \circ h$? Entä $h \circ g$ ja $h \circ g \circ h$?
c) Mitä ovat g^{-1} ja h^{-1}?

7. a) Lisää tiedostoon `JOUKOT.ISE` määrittelyt ainakin joukoille Z3, Z4, Z7 ja Z13 sekä vastaavat summat ja tulot.
b) Mitkä seuraavista ovat ryhmiä
$(\mathbf{Z}_3 \setminus \{0\}, *_3)$
$(\mathbf{Z}_4 \setminus \{0\}, *_4)$
$(\mathbf{Z}_7 \setminus \{0\}, *_7)$
$(\mathbf{Z}_{13} \setminus \{0\}, *_{13})$?
Jos jokin ei ole ryhmä, selvitä miksi ei ole. Mistähän yleisestä säännöstä voisi olla kysymys?

8. ISETL-demojen 5 tehtävä 7 (neliön symmetriat).

9-10. Bonus Miten tarkastetaan ISETLin avulla, onko annettu sääntö todella funktio annetussa (äärellisessä) joukossa? Sen, että tulokset ovat kyseisessä joukossa, saa selville funktiolla `suljettuko`, mutta ...
Selosta tarkasti mitä pitää tarkastaa, tai kirjoita tarvittava tarkastava funktio, nimeltään vaikkapa `laskutoimitusko`. Voit sisällyttää siihen myös sen mitä funktiomme `suljettuko` tekee.

Ilmoituksia

1) Tiistaina 5.10.1999 ei luokkatuntia pidetä. Samoin ei ole viralliseen aikaan vastaanottoa, mutta algebralaisille olkoon vastaanotto vaikkapa keskiviikkona 6.10.1999 klo 10-11.
2) ISETL-demot 7.10. klo 14-16 ovat luokassa M15 (3 kerros, matikan kanslian luona).
3) Joudumme pitämään **pe 10-12 luokkatunnit 8.10.1999** ja 26.11.1999 salissa B10. Koska sali B10 on pieni, **siirretään pistokkaat**:
4) **Eka testi. Tiistaina 12.10.1999** pidämme pistokkaat eli pienen testin, joka tehdään yksilöittäin. Aiheet ovat
- jakoyhtälö
- jaollisuus
- alkuluvut
- suurin yhteinen tekijä
- kongruenssi
- laskutoimitus

Testi keskittyy käsitteiden määritelmiin ja on monivalintatesti. Siihen ei siis tule mitään todistustehtäviä.
Esimerkkitehtävä:
Jos $a \equiv 5 \pmod 7$, niin
a) $5 \mid (7 - a)$
b) $a \bmod 7 = 5$
c) $5 \equiv a \pmod 7$
d) $a + 4 \equiv 2 \pmod 7$
e) $2a \equiv 14 \pmod 5$
(oikeita ovat b, c ja d)
5) Ratkaisemanne ISETL-tehtävät (istuntojen lokikirjat, esim. 1HarjT3.ise) tuokaa vaikkapa disketillä minulle **neljänsien ISETL-demojen** ja **kolmansien kotilaskujen** jälkeen, siis kukin ryhmä yhtenä kappaleena. Niissä pitää olla myös tiedosto `ryhma.ise` vaadittuine funktioineen.