Algebra, syksy 1999

Kotitehtävät 5 (palautettava to 21.10.1999 klo 14 mennessä)

1. Olkoon $\circ$ joukon G liitännäinen laskutoimitus.
a) Todista, että $(a \circ b) \circ (c \circ d) = a \circ \big((b \circ c) \circ d\big)$.
b) Olettaen, että alkioilla a ja b *on* käänteisalkiot laske $(a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1})$.
c) Mitä voit edellisestä päätellä?

2. Tutki, ovatko seuraavat (joukko, laskutoimitus)-parit ryhmiä. Ilmoita kustakin neutraalialkio ja käänteisalkiot. Mikäli eivät ole ryhmiä, **selitä miksi** (tämä vaatii yleensä konkreettisen esimerkin tilanteesta, jossa jokin ehto ei toteudu!).
a) Joukko $\{1, -1\}$ ja tavallinen kertolasku.
b) $2\mathbf{Z}$ (parillisten lukujen joukko) ja tavallinen yhteenlasku.
c) $2\mathbf{Z}$ ja tavallinen kertolasku.
d) $\mathbf{R}^2$ ja vektorien yhteenlasku.
e) 3-ulotteisen avaruuden vektorit ja ristitulo.
f) $\{$`true, false`$\}$ ja looginen operaattori 'tai'.

3. Olkoon $M_2(\mathbf{R})$ reaalialkioisten 2×2-matriisien joukko ja olkoot $+$ niiden yhteenlasku ja $\cdot$ matriisitulo (ks. monisteen Esimerkki 19, s. 28.). Kirjoita näkyviin ehtotyyppisesti niiden matriisien

a) joukko A, joilla vasemmassa alakulmassa on luku 0.
b) joukko B, joilla alkioiden summa on positiivinen.
c) joukko C, joilla oikeassa alakulmassa on luku 1.

Tutki mitkä pareista $(A, +)$, $(B, +)$, $(C, \cdot)$ ovat ryhmiä.

4. Todista Lauseen 5.4 toinen osa, eli että $(ab) \bmod n = a \bmod n *_n b \bmod n$.

5. Etsi tasasivuisen kolmion symmetriaryhmä D_3. Nimeä symmetriat samaan tapaan kuin neliön tapauksessa, eli esimerkiksi R_x olisi kierto x astetta, ja keksi muillekin symmetrioille jokin yksi symboli. Montako alkiota on ryhmässä D_3? Entä montako alkiota on permutaatioryhmässä S_3? Kirjoita ryhmän D_3 laskutoimitustaulukko.

6. Mikäli pari $(G, *)$ on ryhmä, todista se. Jos ei, perustele tarkoin (tietenkin taas konkreettisella esimerkillä).
a) $G := \mathbf{Q}_+$, $a * b := ab/2$,
b) $G := \mathbf{Q}\setminus\{1\}$, $a * b := a + b - ab$.

7. Muodosta ryhmän $(\mathbf{Z}_7\setminus\{0\}, *_7)$ laskutoimitustaulukko. Mitä ovat 2^{-1} ja 5^{-1}?

8. Todista, että $(\mathbf{R}\setminus\{0\}) \times \mathbf{R}$ ja laskutoimitus $*$,

$$(a, b) * (c, d) := (ac, bc + d)$$

muodostavat ryhmän. Onko se Abelin ryhmä?