Algebra, syksy 1999

Kotitehtävät 7 (palautettava to 4.11.1999 klo 14 mennessä)

Ilmoituksia

1. Pistokkaat tiistaina 2.11.1999. Aiheina laskutoimitus, ryhmä, aliryhmä. Testi keskittyy määritelmiin, tällä kertaa siinä on oikein/väärin väittämiä sekä muutama avoimempi kysymys.
2. ISETL-demot viikolla 1.-5.11.1999. Saatte tehdä ryhmissänne pääasiassa omatoimisesti edelliseltä viikolta jäljelle jääneet ISETL-harjoitukset, emme ehdi seminaarin takia paljonkaan ohjaamaan. Kukin ryhmä lähettäköön opelle ratkaisut yhtenä tiedostona sähköpostissa. Luokka M17 on normaalisti varattu noina aikoina. Tarkemmat ohjeet ISETL-demopaperissa.

---

1. Osoita, että ryhmässä on jokaisella yhtälöllä $ax = b$ tasan yksi ratkaisu.
Opastus: Osoita, että ratkaisuja on ainakin yksi, ja toisaalta (vaikkapa supistussäännön 5.17 avulla), että kahta eri ratkaisua ei ole.

2. Todista Lemman 6.2 keskeisimmät osat: Jos $(G, \circ)$ on ryhmä, $H \subseteq G$ ja $(H, \circ)$ on ryhmä, niin
a) G:n neutraalialkio e_G on joukossa H.
b) Jokaisen alkion $h \in H$ ryhmässä G muodostettu käänteisalkio h^{-1} on joukossa H.
Opastusta: a) Käytä yhtälön ratkaisun yksikäsitteisyyttä molemmissa ryhmissä.

3. a) Osoita, että nollasta poikkeavien kompleksilukujen joukko $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ varustettuna kompleksilukujen kertolaskulla on ryhmä.
b) Keksi edelliselle ainakin kaksi erilaista ei-triviaalia aliryhmää.

4. Todista Lause 6.9: Jos g on ryhmän alkio, niin sen virittämä joukko $\langle g \rangle = \{ g^k \mid k \in \mathbf{Z} \}$ on aliryhmä.

5. a) Täydennä luentomonisteessa oleva D_4:n laskutaulukko.
b) Mitä sellaisia aliryhmiä S_4:llä on, jotka ovat aidosti laajempia kuin D_4?

6. Selvitä onko $(\mathbf{Z}_{23} \setminus \{0\}, *_{23})$ syklinen. Jos on, niin etsi sen kaikki virittäjät.

7. Olkoot $(H_1, \circ)$ ja $(H_2, \circ)$ ryhmän $(G, \circ)$ aliryhmiä ja $S \subseteq H_1$, $S \subseteq H_2$. Osoita, että $(H_1 \cap H_2, \circ)$ on joukon S sisältävä ryhmän $(G, \circ)$ aliryhmä.

8. Tee ISETL-harjoitus 8-9 loppuun ja palauta täydennettynä opelle kuten ISETL-demopaperissa pyydetään.