Algebra, syksy 1999

Kotitehtävät 8 (kertausta, ei palauteta)

Ilmoituksia

ISETL-demot viikolla 1.-5.11.1999 (palautuspäivä 5.11.1999) saatte tehdä ryhmissänne (kuten sähköpostissa jo kerroin) seuraavasti: *Ne, jotka eivät olleet 8. ISETL-demoissa*, palauttakoot tehtävien 1b), 2b) ja 3 ratkaisut (siis pyydetyt vastaukset) kirjoitettuna ISETL-harjoituspaperiin (ylimääräisiä jäi luokkaan M17 ja korjattu versio on Web-sivulla).

Kaikki teette ryhmissänne haluamaanne aikaan (vaikkapa normaaleihin) ISETLillä (kommentoiden, mukaan lukien täydennystehtävät) tehtävät 5-10. Nämä varmaan mahtuvat yhteen ISETL-dokumenttiin,jonka voi palauttaa paperilla tai tiedostona. Luvatut funktiot `PR` ja `nimea_ryhman` täydennys ovat Webissä.

Välikoejärjestely on muuttunut: pieni osa (pari ryhmää) voi käydä kokeessa jo **perjantaina 12.11.1999 klo 8.00-10 luokassa M8**. Pääosalle koe on **ilmoitetusta poiketen salissa M19**, maanantaina 15.11.1999 klo 8.00-10. **Koealue: monisteen luvut 1-6.**

Näiden tehtävien ratkaisuja käsitellään viikolla 45. Testin 2 vastaukset takana.

---

1. Osoita, että jokainen syklinen ryhmä on Abelin ryhmä. (Vihje: Lause 5.14).

2. Olkoon $(G,\circ)$ Abelin ryhmä ja olkoon

$$H := \{x \in G \mid x^2 = e\}.$$

Osoita, että $(H,\circ)$ on ryhmän $(G,\circ)$ aliryhmä.

3. Olkoot $(G_1,\circ)$ ja $(G_2,*)$ ryhmiä. Tällöin yhtälö

$$(x_1,x_2)\diamond(y_1,y_2) := (x_1\circ y_1, x_2 * y_2)$$

määrittelee laskutoimituksen joukossa $G_1\times G_2$ (tämäkin kuuluu tarkistaa!). Osoita $(G_1\times G_2,\diamond)$ ryhmäksi.

4. Määrää Fermat'n pienen lauseen avulla pienin ei-negatiivinen jäännös (eli jakojäännös), kun
(i) 5^{1001} jaetaan luvulla 7,
(ii) 3^n jaetaan luvulla 17, ja tiedetään, että $16\,|\,n$.

5. Ratkaise kongruenssiyhtälö $x^2 \equiv x \pmod p$, missä p on alkuluku.

6. Olkoon G ryhmä ja $H\subset G$, $H\neq\emptyset$. Todista, että H on ryhmän G aliryhmä, jos ja vain jos kaikilla $a,b\in H$ pätee $ab^{-1}\in H$.

7. Ryhmän G *keskus* (center) on joukko

$$Z(G) := \{\, a\in G \mid ag = ga \text{ kaikille } g\in G\,\}.$$

Todista, että $Z(G)$ on ryhmän G aliryhmä.

8. Jos G on ryhmä, $a\in G$ ja $a^{12}=e$, niin mikä alkion a kertaluku voi mahdollisesti olla?

9. Olkoot H ja K ryhmän G aliryhmiä.
a) Osoita esimerkin avulla, että $H\cup K$ ei välttämättä ole aliryhmä.
b) Osoita, että $H\cup K$ on ryhmän G aliryhmä, jos ja vain jos $H\subset K$ tai $K\subset H$.

10. Jos $a,b\in G$, niin todista, että tulon ab kertaluku on sama kuin tulon ba.

11. Jos kaikkien ryhmän G alkioiden paitsi neutraalialkion kertaluku on 2, niin todista, että G on Abelin ryhmä.
Vihje: jos alkion a kertaluku on 2, niin $a=a^{-1}$, miksi?

12. Olkoon $G := \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ ja olkoon $*$ laskutoimitus siten, että

$$\begin{array}{lrcll} \text{(i)} & a*b & \le & a+b & \text{kaikille } a,b\in G,\\ \text{(ii)} & a*a & = & 0 & \text{kaikille } a\in G. \end{array}$$

Mikäli tiedetään, että G on ryhmä, niin kirjoita ryhmän G laskutoimitustaulukko.
Vihje: tässä joudut ottamaan liitännäisyyden huomioon jo taulukon rakenteluvaiheessa.

13. Muodostaako pari $(\mathbf{R}\setminus\{0\},*)$ ryhmän, jos

$$a*b = |a|\,b,$$

missä $|a|$ on luvun a itseisarvo?

14. Todista, tai sitten osoita vääräksi:
(i) Jos p on alkuluku ja $p\,|\,(a^2+b^2)$ ja $p\,|\,(c^2+d^2)$, niin $p\,|\,(a^2-c^2)$.
(ii) Jos p on alkuluku ja $p\,|\,a$ ja $p\,|\,(a^2+b^2)$, niin $p\,|\,b$.

15. Jos $2\nmid a$, ja $3\nmid a$, niin todista, että $24\,|\,(a^2-1)$.

16. Jos $syt(a,b)=d$, niin todista, että $\text{syt}(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$.