Algebra, syksy 1999

Kotitehtävät 9 (palautettava to 18.11.1999 klo 10 mennessä)

Ilmoituksia

1. Nämä ovat yhdistetyt kotilaskut ja ISETL-aktiviteetit. Palauttakaa ISETL-osasta paperitulosteet kotilaskujen mukana. Suosittelen, että teette (ainakin valtaosan) ryhmissä jo viikolla 8.-12.11.1999 normaaleihin ISETL-demoaikoihin.

2. Ennakkovälikokeeseen mahtuu perjantaina 12.11.1999 vielä toinen ryhmä Eliten lisäksi, siis luokka M8 klo 8.00-10.00. **Halukas ryhmä ilmoittautukoon viimeistään** torstaina klo 10 mennessä. Muiden välikoehan (ma 15.11.1999 klo 8.00-10.00) siirrettiin luokkaan M19.

3. Pistokkaat tiistaina 23.11.1999. Aiheina sivuluokat, normaalit aliryhmät, tekijäryhmät ja homomorfismit.

---

1. Etsi kaikki ryhmän $\mathbf{Z}_{20}$ (normaalit) aliryhmät H ja muodosta vastaavat tekijäryhmät $\mathbf{Z}_{20}/H$. Koska $\mathbf{Z}_{20}$ on syklinen ryhmä ja sen kaikki aliryhmät ovat normaaleja, tehtävän 5 mukaan tekijäryhmä $\mathbf{Z}_{20}/H$ on syklinen. Selvitä siis, minkä tutun ryhmän kanssa tekijäryhmät ovat isomorfisia, sekä etsi tekijäryhmän virittäjäalkio. (Voi käyttää ISETLiä tarvittaessa).
Malli: aliryhmä $\langle 5\rangle = \{0, 5, 10, 15\}$, tekijäryhmä

$$\mathbf{Z}_{20}/\langle 5\rangle = \{\{0,5,10,15\},\{1,6,11,16\},\{2,7,12,17\},\{3,8,13,18\},\{4,9,14,19\}\} \cong \mathbf{Z}_5,$$

virittäjäalkiona $\{1, 6, 11, 16\}$.

2. Olkoot H_1 ja H_2 ryhmän G normaaleja aliryhmiä. Onko $H_1 \cap H_2$ ryhmän G normaali aliryhmä?

3. Etsi ryhmän S_3 aliryhmä N, joka on normaali.
a) Millainen on tekijäryhmä S_3/N?
b) Minkä ryhmän kanssa se on isomorfinen?
c) Etsi myös aliryhmä, joka ei ole normaali. Vihje: voit käyttää ISETLiä apuna.

4. Olkoon G syklinen ryhmä, ja N mikä tahansa ryhmän G aliryhmä. Todista, että N on normaali aliryhmä.

5. Olkoon G syklinen ryhmä ja N mikä tahansa ryhmän G aliryhmä. Todista, että tekijäryhmä G/N on syklinen etsimällä alkio, joka virittää sen.

6-8. ISETL-tehtävät 1-3 ohessa. Siis: palauttakaa ISETL-osasta paperitulosteet kotilaskujen mukana.