Algebra, syksy 1999, kotitehtävät 9, ratkaisuja

1. Aliryhmä $\langle 0\rangle = \{0\}$, tekijäryhmä
$\mathbf{Z}_{20}/\langle 0\rangle = \{\{0\},\{1\},\dots,\{19\}\} \cong \mathbf{Z}_{20}$,
virittäjäalkio $\{1\}$.
Aliryhmä $\langle 1\rangle = \langle 3\rangle = \langle 7\rangle = \langle 9\rangle = \langle 11\rangle = \langle 13\rangle = \langle 17\rangle = \langle 19\rangle = \mathbf{Z}_{20}$, tekijäryhmä
$\mathbf{Z}_{20}/\langle 1\rangle = \{\{0,1,2,3,\dots,19\}\} \cong \mathbf{Z}_1$,
virittäjäalkio $\{0,1,2,\dots,19\} = \mathbf{Z}_{20}$.
Aliryhmä $\langle 2\rangle = \langle 6\rangle = \langle 14\rangle = \langle 18\rangle = \{0,2,4,6,\dots,18\}$, tekijäryhmä
$\mathbf{Z}_{20}/\langle 2\rangle = \{\{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18\},\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}\} \cong \mathbf{Z}_2$,
virittäjäalkio $\{1,3,5,7,\dots,19\}$.
Aliryhmä $\langle 5\rangle = \langle 15\rangle = \{0,5,10,15\}$, tekijäryhmä
$\mathbf{Z}_{20}/\langle 5\rangle = \{\{0,5,10,15\},\{1,6,11,16\},\{2,7,12,17\},\{3,8,13,18\},\{4,9,14,19\}\} \cong \mathbf{Z}_5$,
virittäjäalkio $\{1,6,11,16\}$.
Aliryhmä $\langle 4\rangle = \langle 8\rangle = \langle 12\rangle = \langle 16\rangle = \{0,4,8,12,16\}$, tekijäryhmä
$\mathbf{Z}_{20}/\langle 4\rangle = \{\{0,4,8,12,16\},\{1,5,9,13,17\},\{2,6,10,14,18\},\{3,7,11,15,19\}\} \cong \mathbf{Z}_4$,
virittäjäalkio $\{1,5,9,13,17\}$.
Aliryhmä $\langle 10\rangle = \{0,10\}$, tekijäryhmä
$\mathbf{Z}_{20}/\langle 10\rangle = \{\{0,10\},\{1,11\},\{2,12\},\{3,13\},\{4,14\},\{5,15\},\{6,16\},\{7,17\},\{8,18\},\{9,19\}\} \cong$
$\mathbf{Z}_{10}$, virittäjäalkio $\{1,11\}$.
Yleisesti jos $n \,|\, 20$, niin $\mathbf{Z}_{20}/\langle n\rangle \cong \mathbf{Z}_n$.

2. Väite: Normaalien aliryhmien leikkaus on normaali.
a) Olkoot H_1 ja H_2 ryhmän G normaaleja aliryhmiä. Kotitehtävää 7/7 soveltaen, leikkaus $H_1 \cap H_2$ on aliryhmä.
b) *Väite:* On normaali aliryhmä. Käytetään vaikkapa Lauseen 8.2 antamaa normaaliuden määritelmän kanssa ekvivalenttia ehtoa:

$$ghg^{-1} \in H_1 \cap H_2$$

kaikille $g \in G$, $h \in H_1 \cap H_2$.
Olkoot siis $g \in G$ ja $h \in H_2 \cap H_1$ mielivaltaiset. Koska $h \in H_1$ ja $h \in H_2$ ja H_1 ja H_2 ovat normaaleja aliryhmiä, Lauseen 8.2 mukaan $ghg^{-1} \in H_1$ ja $ghg^{-1} \in H_2$. Siis $ghg^{-1} \in H_1 \cap H_2$.
3. Ryhmän S_3 normaaleja aliryhmiä ovat
$N_0 := \{[1,2,3]\}$,
$N_1 :=$\{[3,1, 2], [2, 3, 1], [1, 2, 3]\} ja itse
$N_2 := S_3$.
$S_3/N_0 = \{\{[1,2,3]\},\{[1,3,2]\},\{[2,1,3]\},\dots,\{[3,2,1]\}\} \cong S_3$,
$S_3/N_1 = \{\{[3,1,2],[2,3,1],[1,2,3]\},\{[2,3,1],[2,1,3],[3,2,1]\} \cong \mathbf{Z}_2$
$S_3/N_2 = \{S_3\} \cong \mathbf{Z}_1$.
Mikään muu aliryhmä ei ole normaali, esimerkiksi siis \{[1, 2, 3],[2, 1, 3]\} ei ole normaali.
4. Koska G on syklinen, on $G = \langle s\rangle$ jollekin $s \in G$. Silloin, jos $a, b \in G$, on $a = s^t$ ja $b = s^r$ joillekin $t, r \in \mathbf{Z}$. Tällöin $ab = s^t s^r = s^r s^t = ba$, eli G on Abelin ryhmä. Mutta normaaliuden määritelmästä seurasi heti, että Abelin ryhmän jokainen aliryhmä on normaali.
5. Koska G on syklinen, on $G = \langle s\rangle$ jollekin $s \in G$. Näytetään, että alkio Ns virittää ryhmän G/N. Olkoon $Na \in G/N$. Koska a on muotoa $a = s^k$ jollekin $k \in \mathbf{Z}$, niin silloin (Lausetta 8.3 toistuvasti soveltaen)

$$Na = Ns^k = (Ns)(Ns)\cdots(Ns) = (Ns)^k.$$

6-8. ISETL-demoissa.