Algebra, syksy 1999

Kotitehtävät 10 (palautettava to 25.11.1999 klo 14 mennessä)

Ilmoituksia
1. Kiirettä on, välikokeen tulokset ehkä perjantaiksi.
2. Tiistaina 23.11.1999 kolmas testi; aiheena sivuluokat, normaalit aliryhmät ja homomorfismit.

Sovitaan, että $\mathbf{R}_+ := \{\, x \in \mathbf{R} \mid x > 0 \,\}$ *(aidosti positiiviset reaaliluvut).*

1. Todista määritelmän avulla, että funktio $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $g(x) := \sqrt{x}$, on bijektio.

2. Todista 'värittämällä', että ryhmien $(\mathbf{Z}_7 \setminus \{0\}, *_7)$ ja $(\mathbf{Z}_3, +_3)$ välillä on homomorfismi.

3. Tutki, onko kuvaus $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ isomorfismi kertolaskuryhmältä $(\mathbf{R}_+, \cdot)$ itselleen (eli onko se nk. *automorfismi*), kun
a) $f(x) := 2x$
b) $f(x) := \sqrt{x}$

4. Olkoon $f : G \to G'$ ryhmähomomorfismi. Todista, että f on injektio jos ja vain jos sen ydin $\ker f = \{e\}$.

5. Olkoon ryhmä G syklinen ja oletetaan, että $f : G \to G'$ on ryhmäisomorfismi. Todista, että myös G' on syklinen.

6. Todista, että kuvaus $f : \mathbf{Z}_{12} \to \mathbf{Z}_{12}$,

$$f(x) := 4x \bmod 12$$

on homomorfismi, ja etsi lähtöjoukon kuva sekä kuvauksen ydin.

7. Todista määritelmän mukaan, että kuvaus $f(k) := 6^k \bmod 11$ on bijektio $\mathbf{Z}_{10} \to \mathbf{Z}_{11} \setminus \{0\}$.

8. Todista määritelmän mukaan, että kuvaus $f(k) := 6^k \bmod 11$ on homomorfismi ryhmältä $(\mathbf{Z}_{10}, +_{10})$ ryhmään $(\mathbf{Z}_{11} \setminus \{0\}, *_{11})$.
(vrt. ISETL-harjoitus 11 tehtävät 1 ja 2)