Algebra, syksy 1999

Kotitehtävät 11 (palautettava to 2.12.1999 klo 14 mennessä)

Ilmoituksia loppuajan ohjelmasta:
Viimeiset ISETL-demot 13 ke-to 1.-2.12.1999.
Viimeinen varsinainen luokkatunti **7.12.1999, jolloin 4. pistokkaat.**
Matkan takia **ei ole algebran opetusta 8.-10.12.1999**.
Viimeiset kotitehtävät 12-13: palautuspäivä maanantaina **13.12.1999 klo 12 mennessä**.
Kertaus- ja palautetilaisuus tiistaina 14.12.1999 klo 14-16 M2 (huom! aika ja paikka).
2. välikoe (yksilötentti) perjantaina 17.12.1999 klo 8-10 M1.

---

1. Mikä on ryhmähomomorfismin $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$,

$$f(x) := x \bmod n,$$

ydin? Mitä voimme silloin päätellä ensimmäinen isomorfialauseen mukaan? Kuvaile tekijäryhmän $\mathbf{Z}/(\ker f)$ alkioita.

2. Osoita, että $(\mathbf{Z}_n, +_n, *_n)$ on rengas, ja vieläpä ykköselinen ja vaihdannainen.

3. Tarkastellaan joukkoa $\mathbf{R}\times\mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ ja sen yhteenlaskua $+$ ja kertolaskua $\cdot$, joille

$$\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &:= (a+c, b+d), \\ (a,b)\cdot(c,d) &:= (ac-bd, ad+bc). \end{aligned}$$

Todista, että tällöin kolmikko $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ on rengas (Esimerkki 78).

4. Määritellään joukossa $\mathbf{Z}$ uusi kertolasku säännöllä $ab := 1$ kaikilla $a, b \in \mathbf{Z}$.
a) Muodostavatko $\mathbf{Z}$, tavallinen yhteenlasku ja tämä uusi kertolasku renkaan?
b) Entä jos uusi kertolasku määritellään seuraavasti: $ab := 0$ kaikilla $a, b \in \mathbf{Z}$?

5.-6. ISETL-demojen 12 tehtävät 5 ja 6. Toimittakaa muiden ratkaisujen mukana printti, josta käyvät ilmi pyydetyt ISETL-aktiviteetit ja vastaukset kysymyksiin. Saatatte tietenkin tarvita ponnahduslautaa muistakin tehtävistä.

7. Todista Lauseen 11.2 kohta 4: Jos joukossa R on useampi kuin yksi alkio, niin $M(R)$ sisältää nollantekijöitä (ks. moniste Luku 11.5).

Huomautus. ISETL-demojen 12 tehtävän 3 loppupuolen pitäisi olla:

Vastaa seuraaviin edellistä matriisisysteemiä koskeviin kysymyksiin ja väitteisiin:
a) $(M(R), +_2, *_2)$ on rengas. Tosi Epätosi
b) Matriisikertolasku on vaihdannainen. Tosi Epätosi
c) Matriisikertolaskulla on neutraalialkio. Tosi Epätosi
d) Mikä on yhteenlaskun neutraalialkio? ____________________

Kotitehtävien 9 ratkaisuja kääntöpuolella.