Algebra, syksy 1999

Kotitehtävät 12-13 (tehtävät 4,5,6,9 ja 18-19 palautettava ma 13.12.1999 klo 12 mennessä)

Ilmoituksia loppuajan ohjelmasta:
Viimeinen varsinainen luokkatunti **7.12.1999, jolloin 4. pistokkaat.** Palautan kotitehtävät 11 ilmeisesti vasta tiistaina, jolloin saatte ratkaisut.
Jokainen kurssilainen joutuu antamaan **palautetta Web-lomakkeen kautta**; lomake ei ole vielä valmis, mutta ilmoitan sähköpostitse osoitteen sitten kun on.
Matkan takia **ei ole algebran opetusta 8.-10.12.1999**.
Kertaus- ja palautetilaisuus tiistaina 14.12.1999 klo 14-16 M2 (huom! aika ja paikka).
2. välikoe (yksilötentti) perjantaina 17.12.1999 klo 8-10 M1.

---

1. Olkoon $G := \mathbf{Z}_6 \times \mathbf{Z}_2$ ja määritellään laskutoimitus $+$ joukossa $\mathbf{Z}_6 \times \mathbf{Z}_2$ seuraavasti:

$$(a, b) + (c, d) := (a +_6 c, b +_2 d).$$

Silloin $(G, +)$ on ryhmä. Olkoon N syklinen aliryhmä $\langle(1,1)\rangle$. Etsi tekijäryhmä G/N. Minkä tutun ryhmän kanssa tekijäryhmä G/N on isomorfinen?

2. Olkoon $a \in G$ jokin ryhmän G alkio. Todista, että kuvaus $f : G \to G$, $f(x) := axa^{-1}$, on isomorfismi.

3. Todista, että funktio f kompleksilukujen kertolaskuryhmältä $(\mathbf{C} \setminus \{0\}, *)$ reaalilukujen kertolaskuryhmälle $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, jolle $f(x + yi) := \sqrt{x^2 + y^2}$, on homomorfismi. Toisin sanoen f kuvaa kompleksiluvun sen *modulille* eli itseisarvolle. Mikä on homomorfismin f ydin?

4. Olkoot G, G' ja G'' ryhmiä ja funktiot $f : G \to G'$ sekä $g : G' \to G''$ homomorfismeja. Osoita, että näiden yhdistetty kuvaus $G \to G''$ on homomorfismi. Mitä voidaan sanoa funktion f ja yhdistetyn funktion ytimistä suhteessa toisiinsa?

5. Osoita, että isomorfismin käänteiskuvaus on olemassa ja on isomorfismi.

6. Todista Lause 11.4: Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas ja 0_R sen neutraalialkio. Silloin kaikilla $a \in R$ on $0_R \cdot a = 0_R$ ja $a \cdot 0_R = 0_R$.

7. Todista, että renkaassa R on voimassa

$$\begin{aligned} a(b - c) &= ab - ac \\ (a - b)c &= ac - bc \end{aligned}$$

kaikille $a, b, c \in R$ (siis Lemman 11.5 kohdat 4 ja 5).

8. Olkoon $(R, +, \cdot)$ vaihdannainen ykkösellinen rengas. Todista, että jos tulon supistussäännöt

$$\begin{aligned} ax = ay &\quad\Rightarrow\quad x = y \\ xa = ya &\quad\Rightarrow\quad x = y \end{aligned}$$

ovat voimassa kaikilla $x, y \in R$ ja $a \in R \setminus \{0_R\}$, niin $(R, +, \cdot)$ on kokonaisalue (Lauseen 11.9 todistuksen toinen suunta).

9. Määritellään joukossa $\mathbf{Z}$ uusi yhteenlasku $\oplus$ ja uusi kertolasku $\odot$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} a \oplus b &:= a + b - 1, \\ a \odot b &:= a + b - ab. \end{aligned}$$

Osoita, että $(\mathbf{Z}, \oplus, \odot)$ on kokonaisalue.

10. Todista, että joukko $\mathbf{Z}[i] := \{ a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z} \}$ on kokonaisalue, kun laskutoimituksina ovat tavallinen kompleksilukujen yhteenlasku ja kertolasku. Tätä joukkoa kutsutaan *Gaussin kokonaisluvuiksi*.

11. Renkaan alkiota x sanotaan *idempotentiksi*, jos $x^2 = x$.
a) Etsi kaikki renkaan $\mathbf{Z}_{12}$ idempotentit alkiot.
b) Onko kaikissa renkaissa idempotentteja alkioita?
c) Miten renkaan R idempotentit alkiot ja kokonaisalueen käsite liittyvät toisiinsa?

12. Olkoon $(F, +, \cdot)$ kunta. Todista, että tällöin $(F \setminus \{0_F\}, \cdot)$ on Abelin ryhmä (Lause 11.13).

13. Olkoon $\mathbf{Z}[\sqrt{7}] := \{ a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbf{Z} \}$. Osoita, että $\mathbf{Z}[\sqrt{7}]$ on renkaan $\mathbf{R}$ alirengas.

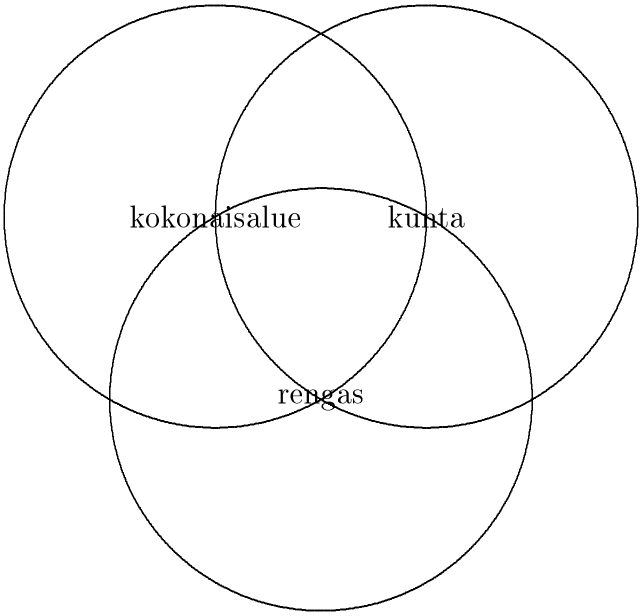
14. Olkoon R rengas, ja olkoon $U(R)$ niiden renkaan R alkioiden joukko, joille on olemassa käänteisalkio renkaan kertolaskun $\cdot$ suhteen.
a) Mitä ovat $U(\mathbf{Z})$, $U(\mathbf{Z}_{12})$ ja $U(\mathbf{Z}_7)$?
b) Todista, että $(U(R), \cdot)$ on ryhmä.

15. Olkoon R kokonaisalue. Todista, että joukko $T := \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in R \right\}$ on matriisirenkaan $M(R)$ alirengas. Onko se kokonaisalue? Entä kunta?

16. Ratkaise yhtälöpari $2x + 3y = 2$ ja $4x - 3y = -3$ kunnassa $(\mathbf{Z}_{11}, +_{11}, *_{11})$.

17. Sijoittele seuraavat renkaat oikeaan lokeroonsa alla olevassa kuviossa:
$\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{C}, \mathbf{Z}_{16}, \mathbf{Z}_{17}, 5\mathbf{Z}, M(\mathbf{R}), M(\mathbf{Z}_2), (\{0, 4, 8, 12, 16\}, +_{20}, *_{20}), T_1, T_2$, missä

$$T_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbf{Z}_3 \right\} \quad \text{ja} \quad T_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{Z}_3 \right\}.$$



Perustele, miksi sijoitit matriisirenkaat T_1 ja T_2 sinne minne sen sijoitit.
Perustele, miksi sijoitit renkaan $(\{0, 4, 8, 12, 16\}, +_{20}, *_{20})$ minne sijoitit.
Miksi jotkut alueet jäävät tyhjiksi?

18-19. ISETL-demojen 13 tehtävät 6,7,8 (paperitulosteena).
20. Täytät ja palautat (sähköisesti) Web-palautelomakkeen 20.12.1999 mennessä.