Algebra

2. välikoe 17.12.1999, ratkaisuista

1. Selvitä lyhyesti mutta täsmällisesti, mitä tarkoitetaan algebrassa käsitteillä
a) kanoninen (ryhmä)homomorfismi.
b) renkaan ideaali.
Katso moniste tai luennot.

2. Ratkaise tekijäryhmässä $\mathbf{Z}_{20}/\langle 5\rangle$ yhtälö $x + \{7, 2, 12, 17\} = \{1, 11, 6, 16\}$.
Ratkaisu ISETL:illä (vastaa sitä, että käydään kokeilemalla läpi kaikki vaihtoehdot):

```
>  nimea_ryhma(Z20,s20);
>  nimea_ryhma(Z20,s20,virit(5));
Ryhm\"{a}n objektit m\"{a}\"{a}ritelty: G, o, oo, e, i
Aliryhm\"{a}n objektit m\"{a}\"{a}ritelty: H, GmodH, Ho
>  GmodH;
{{0, 5, 10, 15}, {1, 6, 11, 16}, {2, 7, 12, 17},
{3, 8, 13, 18}, {4, 9, 14, 19}};
>  { x | x in GmodH: {7,2,12,17} .oo x = {1,11,6,16} };
{{4, 9, 14, 19}};
```

Siis $x = \{4, 9, 14, 19\}$ on ainoa ratkaisu. Toinen vaihtoehto on laskea perustellen niinkuin ryhmässä voidaan tehdä.
3. Selvitä *perustellen*, ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia:
a) Jos f on homomorfismi ryhmältä G ryhmälle G', niin aliryhmän A kuvajoukon alkukuvajoukko on aliryhmä, jolla on aliryhmänä A.
Ratkaisu. Homomorfismissa aliryhmän $A \subseteq G$ kuvajoukko $A' := f(A)$ on maaliryhmän G' aliryhmä (Lause 9.4). Toisaalta aliryhmän alkukuvan $f^{-1}(A')$ on todettu olevan lähtöryhmän aliryhmä. Koska jokaiselle $a \in A$ on $f(a) \in f(A) = A'$, on $a \in f^{-1}(A')$. Siis $A \subseteq f^{-1}(A')$. Koska A aliryhmänä on ryhmä, jossa on sama laskutoimitus kuin G:ssä ja siten aliryhmässä $f^{-1}(A')$, on A myös ryhmän $f^{-1}(A')$ aliryhmä.
Huomautus! Jo triviaalihomomorfismista nähdään, että ei aina ole $f^{-1}(A') = A$.

b) Alirenkaassa ei voi olla eri ykkösalkio kuin itse renkaassa.
Kyllä voi, asiasta on monia esimerkkejä, esim. $\{0, 4, 8\}$ on renkaan $\mathbf{Z}_{12}$ alirengas (demoissa), jolla on ykkösalkiona 4, vaikka itse renkaassa on ykkösalkiona 1. Minusta sanamuodosta käy ilmi, että kysymyksessä implisiittisesti tarkoitetaan vain renkaita ja alirenkaita, joissa on ykkösalkio. Asiaa oli kyllä tulkittu toisinkin.

4. Osoita, että modulo-laskutoimitusrenkaassa $(\mathbf{Z}_k, +_k, *_k)$ ei ole nollantekijöitä täsmälleen silloin, kun k on alkuluku.
Katso moniste tai luennot: Lause 11.8.