ISETL-Harjoitus 4, 1999. Laskutoimitus ja kertausta

Tehtävä 1. Määrittely- ja maalijoukoista

ISETL-funktio `func` on pelkistetyimmillään vain *sääntö*, jonka määrittelemät temput sen sisällä tehdään ja mitä saadaan ulos, ts. minkä arvon sääntö palauttaa. Edellisiä testejä ja tietenkin mitä tahansa totuusarvotyyppiä olevia lausekkeita tulee käyttää `func`:issa estämään vääränlaiset operaatiot, esim. nollalla jako. Jatkossa olemme entistä tarkempia funktion *määrittelyjoukon* ja *maalijoukon* suhteen.
Muunna vanha funktiomme `kongruenttiko`

```
>      kongruenttiko := func(a,b,m);
>>     return ((a-b) mod m = 0);
>>     end func;
```

sellaiseksi, että se palauttaa arvon `OM` aina, kun parametrien arvot eivät ole kongruenssin Määritelmän 3.1 mukaisia (piti siis olla $a, b \in \mathbf{Z}$ ja $m \in \mathbf{N}$). Helpoiten temppu onnistuu estämällä testeillä `return` käskyrivin suoritus.
Kysymys: Mikä siis on saadun kolmen muuttujan `kongruenttiko`-funktion määrittelyjoukko, mikä sille sopiva maalijoukko?
Määrittelyjoukko: ____________________ *Maalijoukko:* ____________________

Tehtävä 2. Modulo-aritmetiikkaa: kertolasku

a) Kirjoita seuraava koodi ja vastaa alla oleviin kysymyksiin.

```
>    Z9 := {0..8};
>    k9 := func(x,y);
>>     if (x in Z9 and y in Z9) then
>>     return (x*y) mod 9;
>>     end if;
>>     end func;
```

Mikä on tämän funktion määrittelyjoukko? ________ Entä maalijoukko? ________
Mitä ovat `k9(2,3), k9(3,3), k9(8,8), k9(6,7), 6 .k9 7`?
Vastaukset: ____
ISETLissä voit siis funktiokutsun `k9(a,b)` sijasta kirjoittaa myös `a .k9 b`. Mitä huomaat pisteen paikasta ja välien jättämisestä? ____________________

b) Muodosta alle kertolaskutaulukko. Voit laskea tarvittavat tulokset helposti ISETL-rakenteilla vaikkapa tuplena tai sitten luupeilla.

Tehtävä 3. Modulo-aritmetiikkaa: yhteenlasku

Kirjoita kahden muuttujan funktio `s9`, jonka syötteet ovat joukon `Z9` alkioita ja joka palauttaa näiden lukujen summan modulo 9 (ks. tehtävä 2). **Laske** `s9(2,3), s9(4,5), s9(8,8), s9(6,7), 6 .s9 7`

Olemme määritelleet kaksi laskutoimitusta `k9` ja `s9` joukossa `Z9`. Merkitään niitä jatkossa normaalissa matemaattisessa tekstissä $*_9$ ja $+_9$, mutta ISETLissä kuten edellä.

Tehtävä 4. Permutaatioaritmetiikkaa

Permutaatio on tapa järjestää n luvun joukko. ISETLissä permutaatioita esitetään TUPLEilla. Esimerkiksi $[1, 3, 2, 4]$ on permutaatio joukosta S_4. **Kirjoita** seuraavat koodinpätkät ja vastaa kysymyksiin:

```
>     S3 := {[a,b,c]: a,b,c in {1,2,3}: #{a,b,c} = 3};
>     os := func(p,q);
>>      if (p in S3 and q in S3) then
>>       return [p(q(i)) | i in [1,2,3]];
>>      end if;
>>    end func;
```

Mitä ovat `os([2,1,3],[1,3,2]), os([2,3,1],[3,1,2]), [2,3,1] .os [3,1,2]`?
Vastaus: ____

Mikä on funktion `os` määrittelyjoukko? __________ Entä maalijoukko? __________

Tehtävä 5. Suljettuko?

Laskutoimituksen on oltava funktio $G \times G \to G$, eli jokaiseen pariin pitää liittyä *kyseisen joukon alkio*. Testaa funktiolla `suljettuko`

```
>  suljettuko := func(J,op);
>>  return (forall x,y in J: (x .op y) in J);
>>  end;
```

ovatko parit $(Z9, +_9)$, $(Z9, *_9)$ ja (S_3, os) suljettuja, siis että "pysyvätkö laskutoimituksen tulokset samassa joukossa".
Huomautus. Tämä ja seuraavaksi määritellyt funktiot tulevat olemaan jatkossa kovassa käytössä. Ne pyydetään kotitehtävinä sijoittamaan yhteen tekstitiedostoon luettaviksi muistiin aina tarvittaessa. Teemme niistä myöhemmin yhteiset versiot.

Tehtävä 6. Neutraalialkio

Löytyykö sellaista alkiota $Y \in \mathbf{Z}_9$, jolle $x *_9 Y = x$ ja $Y *_9 x = x$ kaikkilla $x \in \mathbf{Z}_9$. _
Jos löytyy, niin mikä se on? ______________________________
Sellaista alkiota sanotaan parin $(\mathbf{Z}_9, *_9)$ *neutraalialkioksi* eli *nolla-alkioksi.*
Muodostakaa ISETL-funktio `neutraali`, joka etsii annetusta joukosta G neutraalialkion annetun laskutoimituksen o suhteen. Jos neutraalialkiota ei löydy, palautetaan tuntematon arvo `OM`. Voitte alkaa taas näin:

```
>  neutraali := func(J,op);
```

ISETL-demojen 2 tehtävästä 6 löydät sopivia rakenteita!

Testatkaa toiminta pareilla $(Z9, +_9)$, $(Z9, *_9)$ ja (S_3, os).
Neutraalialkiot ovat: ______________________________

Tehtävä 7

a) Olkoon e_2 (siis mikä?) laskutoimituksen $+_9$ neutraalialkio joukossa $\mathbf{Z}_9$. Löytyykö jokaiselle joukon $\mathbf{Z}_9$ alkiolle x sellainen alkio $y \in \mathbf{Z}_9$, että $x +_9 y = e_2$ ja $y +_9 x = e_2$?
Ehdottakaa nimitystä tuollaiselle alkiolle! ____________________

b) Kirjoita funktio, jonka syötteenä on joukko G ja laskutoimitus o ja joka tutkii, onko kaikille joukon G alkioille olemassa edelläkuvatunlainen alkio laskutoimituksen o suhteen.

Kutsutaan jatkossa kyseisiä alkiota *käänteisalkioiksi*.
Testaa löytyykö jokaiselle joukon $\mathbf{Z}_9$ alkiolle käänteisalkio laskutoimituksen $*_9$ suhteen? ____________________
Mikä? ____________________
Testaa löytyykö jokaiselle joukon S_3 alkiolle käänteisalkio laskutoimituksen `os` suhteen? ____________________ Mikä?

c) Kirjoita funktio `kaanteis`, jonka syötteenä on joukko G, laskutoimitus o ja joukon G alkio g, ja joka palauttaa alkion g käänteisalkion laskutoimituksen o suhteen joukossa G.
Mikä on alkion $[2, 3, 1]$ käänteisalkio joukossa S_3 laskutoimituksen `os` suhteen? ____
Etsi luvun $7 \in \mathbf{Z}_9$ käänteisalkio laskutoimituksen $+_9$ suhteen. ____________
Ja vielä laskutoimituksen $*_9$ suhteen. ____________________

Tehtävä 8. Eräs testi

a) Mitä seuraava funktio tutkii?

```
>  hehheh:=func(G,o);
>>  return forall x,y in G: x .o y = y .o x;
>>  end func;
```

Mille pareista $(Z9, +_9), (Z9, *_9)$ ja (S_3, os) se palauttaa true?
Pareille: ______________________________

b) Kirjoita funktio `liitannainenko`, joka tutkii, onko laskutoimitus o liitännäinen joukossa G. Mille pareista $(Z9, +_9), (Z9, *_9)$ ja (S_3, os) se palauttaa true? ________

Tehtävä 9. Tyypin testaus, relaatio

a) ISETL:issä on useita tyypintestauskäskyjä (ks. Quick Reference tai monisteen liite), joilla voi kysyä onko joku olio merkki(jono), totuusarvo, kokonaisluku, rationaaliluku tai yleensäkään mikään luku, tai onko se joukko, tuple tai funktio.
Selvitä mitä tekevät seuraavat ISETL-rivit:

```
>     is_string(5); is_string("5");
>     is_string(ISETLW); is_string("ISETLW");
>     is_number(-4*3.14); is_number(2 < 3);
>
```

```
>     a := 3*2.4; b := "merkkijono"
>     is_number(a); is_number(b);
>     is_integer(-3); is_integer("2"); is_integer(3/2);
>     is_integer(3 div 2); is_integer(2.5); is_integer(a);
>
>     is_defined(a); is_defined(b); is_defined(c);
>
>     is_boolean(true); is_boolean(false);
>     is_boolean(TRUE); is_boolean("true");
>     is_boolean(is_boolean(false));
>
>     is_tuple({a,b}); is_tuple([a,b]);
>     is_set({a,b}); is_set([a,b]); is_set(a,b);
>     is_func(|x -> x**2|);
>     is_map({[1,2],[1,4]}); is_map([[1,2],[1,4]]);
>     is_func(k9);
>     K := {[[x,y], k9(x,y)] | x,y in Z9};
>     is_map(K); is_func(K);
```

b) Tyyppi `map` on matemaattisesti ottaen *relaatio*, ts. jonkin karteesisen tulon $A \times B$ osajoukko. Sen erikoistapaus `smap` on relaatio, joka on myös funktio. **Muodosta** ISETL-funktio `is_smap`, joka testaa onko annettu relaatio funktio.

Tehtävä 10. Logiikkaa

a) Arvaa ensin - ja kokeile jos tarpeen - mitä tulostavat seuraavat ISETL-käskyt:

```
>   true and false; true and (not false);
>   true impl false; false impl true;
>   (1 < 2) impl (2 > 3);
>   (1 < 2) impl (2 < 3);
>   true iff true;
>   true iff false;
```

b) ISETL-komento `impl` vastaa matematiikan ”jos-niin” ilmausta, esimerkiksi väite

Jos a on jaollinen neljällä, niin a on jaollinen kahdella.

voidaan kirjoittaa ISETLissä näin:

```
>    (a mod 4 = 0) impl (a mod 2 = 0);
```

Miten tutkit ISETLillä äskeisen väitteen todenperäisyyttä kaikille $a \in \{-50, -49, ..., 50\}$?
ISETL-rakenne: ______________________________

c) Mitä tehdään seuraavassa?

```
>   for TA1 in [true,false] do
>>    for TA2 in [true,false] do
>>      print [TA1, TA2, TA1 and TA2,
>>          TA1 or TA2, TA1 impl TA2, TA1 iff TA2];
>>    end for;
>>  end for;
```