ISETL-Harjoitus 5, 1999. Ryhmä, alkion potenssi

Tehtävä 1. Askartelua

a) Selitä kommenttimerkillä $ varustetut ISETL-käskyt ja vastaa kysymyksiin:

```
>   t := [1,2,3,4,5];
>   take x fromb t; x; t;    $
>   take y frome t; y; t;    $
>   t(3) := 5; t;            $
>   Z5 := {0..4}; Z5;
>   Z5 less 0; Z5;           $
>   Z6 := Z5 with 5; Z6; Z5; $
```

Mitä siis tekevät rakenteet:

`take - fromb`: ________________________ `take - frome`: ________________________

`- less -`: ________________________ `- with -`: ________________________

b) Mikä matemaattinen asia on esillä seuraavassa?

```
>   A := {1..4}; B := {1..3};
>   T := {[a,b] | a in A, b in B}; T; $
>   is_map(T);                        $
>   T(1);                             $
>   E := {[1,2],[2,3],[4,2]};
>   E(1); E(2); E(3); E(4);           $
```

Miksi ensin on virheilmoitus, miksi sitten `E(1)` toimii?

c) Muodosta funktio `x`, jolla saa karteesisen tulon. Määrittele se niin, että saat sitten seuraavalla käskyllä saman tuloksen kuin alla:

```
>   A .x B;
{[1, 2], [1, 3], [1, 1], [2, 3], [2, 2], [2, 1], [3, 1], [3, 2], [3, 3],
 [4, 2], [4, 3], [4, 1]};
```

Tehtävä 2. Laskutoimitusten ominaisuudet

Kullakin ryhmällä pitäisi olla tehtynä tiedosto `RYHMA.ISE`, joka sisältää perustyökalut laskutoimitusten ominaisuuksien tutkimiseen, siis funktiot

`suljettuko(J,op)`, maalijoukko {`true, false`}
`liitannainenko(J,op)`, maalijoukko {`true, false`}
`vaihdannainenko(J,op)`, maalijoukko {`true, false`}
`neutraalialkioko(J,op)`, maalijoukko {`true, false`}
`neutraali(J,op)`, maalijoukko {alkio, OM}
`kaanteisalkiotko(J,op)`, maalijoukko {`true, false`}
`kaanteis(J,op,a)`, maalijoukko {alkio, OM}

Jos ei ole valmista, tehkää heti loppuun tai lainatkaa naapureilta!
Tiedoston RYHMA.ISE saa ISETLissä käyttöön komennolla `!include a:RYHMA.ISE`. ISETL vain lukee määrittelyt, jos ei sinne ole mitään tulostettavaa sisällytetty. Muistissa olevien muuttujien ja funktioiden nimet saa selville direktiivillä `!ids` ja funktioiden koodin direktiivillä `!pp`, **kokeile** esimerkiksi (ilman puolipistettä)

```
> !pp kaanteis
```

Kokeile funktioiden toimintaa seuraavilla joukoilla ja laskutoimituksilla; jos tulos on `false`, etkä keksi heti miksi, **muodosta** ISETLin avulla vastaesimerkki:

a) Kokeilu 1

```
>   G := {0..4};
>   o := |x,y -> 3*(x + y) mod 5|;
```

Voimassa ovat: ____

b) Kokeilu 2

```
>   G := {true,false};
>   ja := |P,Q -> P and Q|;
```

Voimassa ovat: ____

Tehtävä 3. Ryhmä

Klikkaa WWW-sivulta
`http://www.joensuu.fi/matemluonto/matematiikka/kurssit/algebra/Materiaalia/index.html`
tiedosto `JOUKOT.ISE` ja talleta se levykkeelle. Se sisältää
- joukot Z2, Z5, Z6, Z12, Z20, S3, S4
- laskutoimitukset s2, s5, s6, s12, s20, k2, k5, k6, k12, k20, eli laskutoimituksia $+_2, \ldots, +_{20}$ ja $*_2, \ldots, *_{20}$ sekä permutaatioiden yhdistämisen `os`.

Lataa ISETLin muistiin JOUKOT.ISE direktiivillä `!include a:JOUKOT.ISE`.
Kirjoita `> !pp os`, niin näät 'mukautuvan' ossin.

Määritelmä. Olkoon $\circ$ joukon G laskutoimitus. Pari $(G, \circ)$ on *ryhmä* (group), jos
(i) $\circ$ on liitännäinen,
(ii) laskutoimituksella $\circ$ on neutraalialkio $e \in G$,
(iii) jokaisella $a \in G$ on käänteisalkio $a^{-1} \in G$.

Kirjoita funktio `onko_ryhma`, jonka syötteenä on joukko G ja joukon G alkioille määritelty operaatio o ja joka tarkistaa, onko $(G, \circ)$ ryhmä.
HUOMAUTUS. Ryhmän määritelmään kuuluu, että $\circ$ on laskutoimitus joukossa G. Tarkasti ottaen funktion `onko_ryhma` tulisi tarkistaa myös tämä. Oletamme kuitenkin tässä, että operaatio $\circ$ on määritelty koko joukossa G ja tyydymme tarkistamaan, että operaatio $\circ$ on suljettu joukossa G.
Testaa funktiollasi seuraavia pareja. Mikäli pari ei ole ryhmä, **selvitä** miksi.
a) $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ on ryhmä. / Ei ole ryhmä, sillä ____________________
b) $(\mathbb{Z}_{12}, *_{12})$ on ryhmä. / Ei ole ryhmä, sillä ____________________
c) $(\mathbb{Z}_{12}\backslash\{0\}, *_{12})$ on ryhmä. / Ei ole ryhmä, sillä ____________________
d) $(\mathbb{Z}_5, *_5)$ on ryhmä. / Ei ole ryhmä, sillä ____________________
e) $(\mathbb{Z}_5\backslash\{0\}, *_5)$ on ryhmä. / Ei ole ryhmä, sillä ____________________
f) $(\mathbb{Z}_5\backslash\{0\}, *_6)$ on ryhmä. / Ei ole ryhmä, sillä ____________________
g) $(\mathbb{Z}_6\backslash\{0\}, *_6)$ on ryhmä. / Ei ole ryhmä, sillä ____________________
h) $(\mathbb{Z}_6, +_5)$ on ryhmä. / Ei ole ryhmä, sillä ____________________
i) Joukon $\mathbb{Z}_{12}$ parillisten alkioiden joukko ja $*_{12}$ on ryhmä. / Ei ole, sillä __________
j) Joukon $\mathbb{Z}_{12}$ parillisten alkioiden joukko ja $+_{12}$ on ryhmä. / Ei ole, sillä __________
k) $(\mathbb{Z}_{12}, os)$ on ryhmä. / Ei ole ryhmä, sillä ____________________
l) (S_3, os) on ryhmä. / Ei ole ryhmä, sillä ____________________
m) (S_4, os) on ryhmä. / Ei ole ryhmä, sillä ____________________
n) $(S_3 \setminus \{[1, 3, 2]\}, os)$ on ryhmä. / Ei ole ryhmä, sillä ____________________

Tehtävä 4

a) Tutkitaan ryhmää (S_3, os).
Mitä on `[2,3,1] .os [2,3,1]` ? ____________________
Mitä on `[2,3,1] .os [2,3,1] .os [2,3,1]` ? ____________________
Mitä on `[2,3,1] .os [2,3,1] .os [2,3,1] .os [2,3,1]` ? ____________________

b) Ryhmässä $(\mathbb{Z}_6, +_6)$:
$5 +_6 5 =$
$5 +_6 5 +_6 5 =$
$5 +_6 5 +_6 5 +_6 5 =$
$5 +_6 5 +_6 5 +_6 5 +_6 5 =$

Tehtävä 5. Alkioiden potenssit

a) Olkoon g ryhmän $(G, \circ)$ alkio ja $n \in \mathbb{N}$. Miten määritellään alkion g potenssi g^n?

____

____

b) Onko totta, että aina jossakin vaiheessa $g^m = e$, kun g on ryhmän $(G, \circ)$ alkio ja e on samaisen ryhmän neutraalialkio? Tutki väitettä niille tehtävän 3 joukko-laskutoimituspareille, jotka olivat ryhmiä.
c) Ehdota määritelmää negatiivisille potensseille. ____________________

____

____

d) Mitä on `[2,3,1]`$^{-2}$? ____________________

Tehtävä 6. Ovatko seuraavat parivaljakot ryhmiä?

Tutki, ovatko seuraavat (joukko, laskutoimitus)-parit ryhmiä. Mikäli eivät, **selitä** miksi. Näissä tehtävissä joudutte käyttämään omia päitänne (ja paperia ja kynää) tai VISETLiä eli VIRTUAL ISETLiä:
a) joukko $\{1, -1\}$ ja tavallinen kertolasku
b) $\mathbb{Z}$ ja tavallinen yhteenlasku
c) $\mathbb{Z}$ ja tavallinen kertolasku
d) $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ja tavallinen kertolasku
e) $2\mathbb{Z}$ (parillisten lukujen joukko) ja tavallinen yhteenlasku
f) $2\mathbb{Z}$ ja tavallinen kertolasku
g) $\mathbb{R}^2$ ja vektorien yhteenlasku.
h) 3-ulotteisen avaruuden vektorit ja ristitulo
i) {`true, false`} ja looginen operaattori 'tai'

Tehtävä 7. Neliön symmetriat (ainakin osittain kotiin)

Tarkastellaan jostakin jäykästä materiaalista tehtyä ohutta neliötä, esimerkiksi levykettä. Merkitse alustaan ja neliön nurkkiin numerot 1, 2, 3 ja 4. Kuvittele, että nostat neliön ja laitat sen takaisin samaan paikkaan niin että mahdollisesti nurkkien paikat muuttuvat. Kutsutaan tällaista operaatioita *neliön symmetriamuunnokseksi* tai *neliön symmetriaksi*. Voit tehdä tämän kaksi kertaa peräkkäin, kenties käyttäen erilaista symmetriaa jälkimmäisellä kerralla. Jos suoritat kaksi erilaista symmetria-muunnosta peräkkäin, lopputulos on silti neliön symmetriamuunnos. Symmetrioiden suorittamista peräkkäin voidaan niinmuodoin ajatella operaationa, jossa kahdesta symmetriasta saadaan uusi symmetria suorittamalla nuo kaksi symmetriaa peräjälkeen ja katsomalla lopputulosta.

a) Kuinka monta erilaista symmetriamuunnosta neliöllä on? ______, ja ne ovat:

____

b) Selitä kuinka neliön symmetria voidaan käsittää permutaationa (huomaa, että tämän voi tehdä usealla eri tavalla):

____

____

c) Talleta ISETLissä neliön symmetrioiden joukko nimelle `D4` permutaatioiden avulla ja lisää se tiedostoon JOUKOT.ISE.
Mitä laskutoimitusta voit käyttää symmetrioiden yhdistämiseen? ______________

d) Mitä laskutoimituksen ominaisuuksia neliön symmetrioiden yhdistämisellä on?
suljettu __, liitännäisyys __, vaihdannaisuus __, neutraalialkio __, vasta-alkiot __.

Tehtävä 8. Askartelua

a) Tutki seuraavia olioiden `f,g,h` koodeja ja arvaa toiminta. Toteuta ne.

```
>   f := func(x); return (x+3) mod 6; end func;
>   f(5); f(0); f(37);
>   g := | x -> (x+3) mod 6 |;              $
>   g(5); g(0); g(37);
>   h := {[x, (x+3) mod 6] | x in [-10..10]}; $
>   h(5); h(0); h(37);                      $
>   forall x in [-10..10]: f(x) = g(x) and f(x) = h(x);$
```

Mitä yhteistä niillä on: ______________________________

Mitä eroa: ______________________________

b) Lue läpi seuraavat koodit ja koeta ymmärtää mitä niissä tapahtuu:

```
>   F := func(P,Q); return (P impl Q); end func;
>   G := func(P,Q); return ((P and Q) or P); end func;
>   [[[T1,T2],F(T1,T2)]| T1,T2 in [true,false]];
>   [[[T1,T2],G(T1,T2)]| T1,T2 in [true,false]];
```

Sopivat määrittelyjoukot: ______________ *Maalijoukot*: ______________
Millä muuttujien arvopareilla F ja G saavat eri arvot: ______________

```
>   FJ := {F,G}; FJ;
>   tosiepa := func(H);
>>   if H in FJ then return H(true,false); end if;
>>   end func;
>   tosiepa(F); tosiepa(G);
```

Mikä on `tosiepan` määrittelyjoukko? ______________________