ISETL-Harjoitus 6, 1999. Potenssit, yhtälöt

Ihan aluksi talleta tiedoston `RYHMA.ISE` uusi versio WWW-sivulta
`http://www.joensuu.fi/matemluonto/matematiikka/kurssit/algebra/Materiaalia/index.html`
Lataa sitten ISETLW:n muistiin ryhmätestit sekä joukot ja laskutoimitukset (onhan mukana kotilaskuina lisätyt):

```
>  !include a:ryhma.ise
>  !include a:joukot.ise
```

Tehtävä 1. (vrt. ISETL-demojen 5 tehtävä 4)

a) Laske ryhmässä $(\mathbf{Z}_6, +_6)$:
$5 +_6 5 =$
$5 +_6 5 +_6 5 =$
$5 +_6 5 +_6 5 +_6 5 =$
$5 +_6 5 +_6 5 +_6 5 +_6 5 =$

b) Tutkitaan ryhmää (S_3, os). Laske
`[2,3,1] .os [2,3,1]` =
`[2,3,1] .os [2,3,1] .os [2,3,1]` =
`[2,3,1] .os [2,3,1] .os [2,3,1] .os [2,3,1]` =

Tehtävä 2. Askartelua

Mitä tekee koodi

```
>  f := func(p,n);
>>  local q;
>>  if is_integer(n) and n >= 1 then
>>    q := p;
>>    if n > 1 then q := %os[p | k in [1..n]]; end if;
>>    return q;
>>  end if;
>>  end func;
> f([2,3,1],0); f([2,3,1],1); f([2,3,1],2); f([2,3,1],3); f([2,3,1],4);
```

Vastaus: ____________________

Tehtävä 3. Alkioiden potenssit

a) Olkoon g ryhmän $(G, \circ)$ alkio ja $n \in \mathbf{N}$. Miten määritellään alkion g potenssi g^n?
$g^1 =$ ____________ $g^2 =$ ____________ $g^n =$ ____________

b) Miten määritellään nollas potenssi g^0? ____________

c) Ehdota määritelmää negatiivisille potensseille: $g^{-1} =$ ________ $g^{-2} =$ ________
$g^{-n} =$ ____________________

d) Laske
$[2,3,1]^{-1} =$ ______ $[2,3,1]^{-2} =$ ______ $[2,3,1]^{-3} =$ ______ $[2,3,1]^{-4} =$ ______
$[2,3,1]^{-90} =$ ______ $[2,3,1]^{-91} =$ ______ $[2,3,1]^{-92} =$ ______ $[2,3,1]^{-93} =$ ______

Tehtävä 4. Nimetään ryhmä

Tiedostoon `ryhma.ise` on lisätty kolme ohjelmaa:
`laskutoimitusko`, korvaa funktion `suljettuko`
`onko_ryhma`, funktio viime demoista
`nimea_ryhma`, proseduuri.
Tutki komennon `> !pp nimea_ryhma` avulla tämän proseduurin tomintaa. Kirjoita myös seuraavat rivit, ja varmista, että ymmärrät mitä niissä tapahtuu:

```
> nimea_ryhma(Z6,s6);
> G; e; !pp o
> 2 .o 3; 3 .o 4;
> i(2);
> [[x,i(x)] | x in G];
> nimea_ryhma(Z5-{0}, k5);
> G; e; !pp o
> 2 .o 3; 3 .o 4;
> i(2);
> [[x,i(x)] | x in G];
```

Tehtävä 5. Lisää potensseja

a) Kirjoita seuraava koodi, JOKA OLETTAA, ETTÄ OLET SUORITTANUT KOMENNON `nimea_ryhma(G,o)` JOLLEKIN RYHMÄLLE (G, o):

```
> pot := func(g,n);
>>  s := e;
>>  for i in [1..n] do s := s .o g; end for;
>>  return s;
>>  end func;
```

Mitä se tekee? ______________________________

b) Määritä ne välin $[1, 20]$ luvut n, joille $[2, 3, 1]^n = e$, $n =$ ____________
ja ne, joille $[2, 1, 3]^n = e$, $n =$ ____________

c) Onko totta, että aina jossakin vaiheessa $g^m = e$, kun g on ryhmän $(G, \circ)$ alkio ja e on samaisen ryhmän neutraalialkio? Tutki väitettä seuraaville joukko-laskutoimituspareille (mikäli käytät `pot`-funktiota, muista suorittaa ensin `nimea_ryhma`-komennot!):

$(\mathbf{Z}_6, +_6)$ ________ $(\mathbf{Z}_5 \setminus \{0\}, *_5)$ ________ (S_3, os) ________ $(\mathbf{Z}, +)$ ________

Entä joukko-laskutoimitusparille $(\mathbf{Z}_6, *_6)$, joka ei ole ryhmä? ____________

d) Muuta edellä olevaa `pot` funktiota niin, että sillä voidaan määrätä myös negatiiviset potenssit. Huomaa funktion `i` rooli!

Tehtävä 6. Yhtälöistä

Ratkaise tavalla tai toisella joukossa S_3:

$$
\begin{array}{llll}
a) & [2,1,3] \circ p = [3,1,2] & b) & p \circ [2,3,1] \circ p = p \circ [3,1,2] \\
c) & [3,1,2] \circ p^9 = [1,3,2] & d) & [3,1,2] \circ p^{10} = [1,3,2]
\end{array}
$$