ISETL-Harjoitus 8-9, 1999. Syklisyys, sivuluokat, normaalius

TÄMÄ PAPERI SISÄLTÄÄ MYÖS ENSI VIIKON ISETL-TEHTÄVÄT (5-10). Palauttakaa ratkaisunne tehtäviin 5-10 ryhmittäin **yhtenä tiedostona** `ryhmannimi.ise` vaikkapa sähköpostina (Martti.Pesonen@Joensuu.Fi) viimeistään perjantaiaamuna 5.11.1999.
Kopioi taas tiedostojen `ryhma.ise` ja `joukot.ise` uudet versiot WWW-sivulta
`http://www.joensuu.fi/matemluonto/matematiikka/kurssit/algebra/Materiaalia/index.html`
Lataa ne sitten ISETLW:n muistiin `!include`:lla.

Tehtävä 1. Uusia funktioita

Tiedostoon `joukot.ise` on lisätty funktiot muotoa
`Z := func(n);` generoi minkä tahansa joukon $\mathbf{Z}_n$,
`s := func(n);` tuottaa minkä tahansa funktion $+_n$,
`k := func(n);` tuottaa minkä tahansa funktion $*_n$,
Tiedostoon `ryhma.ise` on lisätty funktiot muotoa
`onko_aliryhma := func(H,G,o);` viimekertainen, testaa onko H joukon G aliryhmä operaation $\circ$ suhteen
`kaikki_aliryhmat := func(G,o);` palauttaa kaikkien aliryhmien joukon
`kaikki_ryhmat := func(G,o);` palauttaa kaikki joukon G ne osajoukot, jotka ovat operaation $\circ$ suhteen ryhmiä
`virit := func(g);` viimekertainen alkion g virittämä joukko
`yhden_virittamat := func(G,o);` palauttaa yhden alkion virittämät osajoukot
Kaksi viimeistä edellyttävät `nimea_ryhma`-funktion käyttöä!

---

a) Tutki edellisiä funktioita (muista !pp) ja suorita ajatuksella käskyt

```
>  !setrandom off
>  Z(15);
>  Z15 := Z(15); Z15;
>  5 .s(15) 13; $ havainto ?
>  5 .(s(15)) 13;
>  s15 := s(15);
>  5 .s15 13;
>  k15 := k(15);
>  5 .k15 8;
>
>  onko_ryhma(Z15,s15);
>  nimea_ryhma(Z15,s15);  G; e; 5 .o 13; i(9);
>  virit(4); virit(3);
>  yhden_virittamat(G,o);
>  kaikki_aliryhmat(G,o); $ K\"{a}yt\"{a} vain "pienille" joukoille #G < 17.
>  kaikki_ryhmat(G,o); $ K\"{a}yt\"{a} vain "pienille" joukoille #G < 17.
>
>  onko_ryhma(Z15-{0}, k15);
```

b) Vaikka joukko $(\mathbf{Z}_{15} \setminus \{0\}, *_{15})$ ei olekaan ryhmä, voidaan sen osajoukoista löytää ryhmiä. **Mitä ryhmiä ja näiden aliryhmiä** siihen sisältyy?
Laajin ryhmä: ____________________
Sen aliryhmiä: ____________________
Muita ryhmiä: ____________________

Tehtävä 2. Syklisiä?

Yhden alkion virittämää ryhmää $\langle g\rangle$ kutsutaan *sykliseksi*.
a) Muodosta seuraavien parien kaikki **aliryhmät** sekä **tutki mitkä** ovat **syklisiä** ja mitkä ovat niiden **virittäjäalkiot**.
Muista aina ensin *nimetä ryhmä*, mikäli käytät ISETL:n funktioita `pot`, `virit` tai `yhden_virittamat`!

$(\mathbf{Z}_{13},+_{13})$ ______ virittäjä(t) ____
______ virittäjä(t) ____
$(\mathbf{Z}_{14},+_{14})$ ______ virittäjä(t) ____
______ virittäjä(t) ____
$(\mathbf{Z}_{17}\setminus\{0\},*_{17})$ ______ virittäjä(t) ____
______ virittäjä(t) ____
(S_3,os) ______ virittäjä(t) ____
______ virittäjä(t) ____
______ virittäjä(t) ____
(D_4,os) ______ virittäjä(t) ____
______ virittäjä(t) ____
______ virittäjä(t) ____
$(\text{kierrot},os)$ ______ virittäjä(t) ____

b) Mitkä tehtävän 1 b)-kohdassa esiin tulleista ryhmistä ovat syklisiä? ______
______

Tehtävä 3. Sivuluokat

Määritelmä. Olkoon $(G,\circ)$ ryhmä, H ryhmän G aliryhmä, ja $a\in G$. Alkion a määräämä *oikeanpuoleinen sivuluokka* modulo H on joukko

$$Ha = H\circ a := \{\, h\circ a \mid h\in H\,\}.$$

Vastaavasti alkion a määräämä *vasemmanpuoleinen sivuluokka* modulo H on joukko

$$aH = a\circ H := \{\, a\circ h \mid h\in H\,\}.$$

a) Ryhmänä on $(\mathbf{Z}_{12},+_{12})$ ja aliryhmänä $H:=\{0,4,8\}$. Sivuluokkia ovat

$H+0=$ ______ $H+1=$ ______ $H+2=$ ______ $H+3=$ ______
$H+4=$ ______ $H+5=$ ______ $H+6=$ ______ $H+7=$ ______
$H+8=$ ______ $H+9=$ ______ $H+10=$ ______ $H+11=$ ______

Erilaisia sivuluokkia on __ kpl, aliryhmän kertaluku on __, ryhmän kertaluku on __.

b) Ryhmänä on $(\mathbf{Z}_{31},*_{31})$. **Talleta** joukko muuttujaan `Z31` ja laskutoimitusfunktio nimelle `k31` (ks. Tehtävä 1). Suorita sitten komento `nimea_ryhma(Z31-{0},k31);`.
Etsi alkion 23 virittämä syklinen aliryhmä `pot`-funktion avulla ja talleta se muuttujaan `H`. $H=$ ______
Etsi kaikki oikeanpuoleiset sivuluokat modulo H:

______
______

Erilaisia sivuluokkia on __ kpl, aliryhmän kertaluku on __, ryhmän kertaluku on __.

c) Jos ryhmän G kertalukua merkitään $o(G)$ ja aliryhmän H kertalukua $o(H)$, niin Millainen yhtälö näyttäisi vallitsevan ryhmän kertaluvun, aliryhmän kertaluvun ja sivuluokkien lukumäärän välillä? ______

Listaa tähän havaintoja oikeanpuoleisiin sivuluokkiin modulo H liittyen. ______________

____

____

Tehtävä 4. Funktio PR

a) Jos meillä on laskutoimitus $\circ$ joukossa G, niin voimme muodostaa *yleistetyn laskutoimituksen* $\circ\circ$ seuraavasti:
1) Jos $s, t \in G$ ovat alkiota, niin $s \circ\circ t := s \circ t$.
2) Jos $S \subseteq G$ on joukko ja $t \in G$ on alkio, niin $S \circ\circ t := \{ x \circ t \mid x \in S \}$.
3) Määrittele vastaavasti joukko $s \circ\circ T$. Se on $s \circ\circ T := \{$ ______________________ $\}$
4) Jos $S, T \subseteq G$ ovat molemmat joukkoja, niin $S \circ\circ T := \{x \circ y \mid x \in S, y \in T\}$.

Mikä tapaus näistä oli kyseessä edellisen tehtävän sivuluokissa? ______________

b) Laadi ISETL-funktio `PR`, jonka syötteenä on joukko ja operaatio, ja joka palauttaa yleistetyn laskutoimitusfunktion. Toisin sanoen funktiosi koodi alkaa näin

```
> PR := func(J,op);
    > return func(s,t);
        > if s in J and t in J then return s .op t; end;
        > if s subset J and t in J then ...
```

c) Nyt **määrittele** $\circ\circ$ joukon $\mathbf{Z}_{12}$ yleistetyksi laskutoimitukseksi:
`> oo := PR(Z12, s12);`
Voit nyt käyttää sitä tavalliseen tapaan komennolla `T .oo S`. Tässä `T` ja `S` voivat olla joko joukkoja tai alkioita.
Testaa nyt laskutoimitusta $\circ\circ$ joukossa $\mathbf{Z}_{12}$:

```
> {0,3,4} .oo 2 =
> 3 .oo {0,1,5,6,7,8} =
> 3 .oo 4 =
> {0,1,2} .oo {4,5,6} =
```

Miten saat tämän uuden yleistetyn laskutoimituksen $\circ\circ$ avulla laskettua tehtävän 3.a) sivuluokan $H + 2$? ______________________________

Tehtävä 5. Aliryhmiä ja sivuluokkia

a) Suorita komento `oo := PR(S4,os)`. Tarkastellaan nyt ryhmää S_4. Talleta nimelle `T` niiden permutaatioiden joukko, jotka pitävät nelosen paikallaan. Onko T ryhmän S_4 aliryhmä? ______________________________
Etsi sivuluokka $T \circ [2, 4, 3, 1]$ yleistetyn laskutoimituksen $\circ\circ$ avulla. Onko tämä sama kuin $[2, 4, 3, 1] \circ T$? ______________________________
Etsi jokin toinen permutaatio s joukosta S_4, jolle $Ts \neq sT$. Löysimme, että $s =$ __

b) Tutki, onko seuraavissa tapauksissa voimassa ehto $Hg = gH$ kaikille $g \in G$:
1. $G := S_4$, $H := \langle [4, 2, 3, 1] \rangle$. ______________________________
Aloita tämä seuraavilla komennoilla: `oo := PR(S4,os);nimea_ryhma(S4,os);`
2. $G := S_3$, H on se S_3:n aliryhmä, jossa on kolme alkiota. ______________
3. $G := S_3$, $H := \{[1, 2, 3], [1, 3, 2]\}$. ______________________________
4. $G := \mathbf{Z}_{20}$, H on mikä tahansa $\mathbf{Z}_{20}$:n ei-triviaali aliryhmä. ______________
Ainakin seuraavat tehtävät tulee jättää toiselle viikolle!

Tehtävä 6. Aliryhmän nimeäminen

Kopioi tiedostot verkosta (ks. sivu 1). Tiedostoon `ryhma.ise` *tullaan lisäämään* funktio `PR` ja `nimea_ryhma`-ohjelmaan tehdään muutoksia: voit kirjoittaa entiseen tapaan `nimea_ryhma(Z20,s20);` tai asettaa kolmanneksi aliryhmän:
`> nimea_ryhma(Z20, s20, {0,5,10,15});`
Katso muuttujien `H` ja `GmodH` arvot ja laske
`Ho(2);` ____________ ja `Ho(3);` ____________

Tehtävä 7. Sivuluokkaoperaatioita

Tutkitaan ryhmän $\mathbf{Z}_{20}$ aliryhmän $H := \{0, 5, 10, 15\}$ sivuluokkia (jo edellä nimetty).
a) Katso, millaisia ovat sivuluokat modulo H komennolla `GmodH;`. Muista, että $H + 2$ on nyt `Ho(2)` eli kahden määräämä oikeanpuoleinen sivuluokka modulo H.
$G \bmod H =$ ____________

b) Laske `.oo`-laskutoimituksen avulla kahden oikeanpuoleisen sivuluokan summia, ja tarkasta, tuleeko niistä yhä jokin sivuluokka vai ei.
Mitä ovat
`Ho(2) .oo Ho(3);` ________ `Ho(0) .oo Ho(5);` ________
`Ho(3) .oo Ho(4);` ________ `Ho(7) .oo Ho(8);` ________
c) Onko b)-kohdan esimerkeille voimassa `Ho(a) .oo Ho(b) = Ho(a .o b)`? ____
d) Entä onko sama voimassa kaikille $a, b \in G$? ________
e) Tutki funktiolla `onko_ryhma`, muodostavatko sivuluokkien joukko $G \bmod H$ ja yleistetty laskutoimitus $\circ\circ$ ryhmän.

Tehtävä 8. Normaali aliryhmä, testausfunktio

Sivuluokkien joukko $G \bmod H$ on ryhmä, jos aliryhmä H on *normaali*, eli jos kaikille $g \in G$ on voimassa $gH = Hg$ (oikean- ja vasemmanpuoleiset sivuluokat samoja). Kirjoita funktio `onko_normaali`, jonka syötteenä on aliryhmä ja ryhmä ja joka tarkistaa, onko aliryhmä normaali.

Tehtävä 9. Jäännösluokat G/H

Nimeä ryhmä $(\mathbf{Z}_{13} \setminus \{0\}, *_{13})$ ja sen aliryhmä $\langle 5 \rangle$.
Sivuluokat ovat: ____________
Onko sivuluokkien joukko $G \bmod H$ ja yleistetty laskutoimitus $\circ\circ$ ryhmä? ____
Täytä laskutoimitustaulukko:

	$\{1,5,8,12\}$	$\{4,6,7,9\}$	$\{2,3,10,11\}$
$\{1,5,8,12\}$	$\{1,5,8,12\}$		
$\{4,6,7,9\}$			
$\{2,3,10,11\}$			

Tehtävä 10. Sivuluokat aina ryhmiä?

Tarkasta, että $H := \{[2,4,1,3], [3,1,4,2], [4,3,2,1], [1,2,3,4]\}$ on ryhmän (S_4, os) aliryhmä, ja nimeä ne `nimea_ryhma`:lla.
a) Laske `Ho([4,1,2,3]) .oo Ho([4,2,3,1]);` ________
Onko se jokin oikeanpuoleisista sivuluokista modulo H? ________
b) Onko aliryhmä H normaali? ________