ISETL-Harjoitus 10, 1999. Homomorfismeista

Kopioi taas tiedostojen `ryhma.ise` ja `joukot.ise` uudet versiot WWW-sivulta
`http://www.joensuu.fi/matemluonto/matematiikka/kurssit/algebra/Materiaalia/index.html`

Lataa ne sitten ISETLW:n muistiin `!include`:lla.
Näissä harjoituksissa tulemme käsittelemään kuvauksia ryhmästä ryhmään. Tätä varten tiedostoon `ryhma.ise` on lisätty koodi `nimea_ryhma'`, joka on muuten samanlainen kuin `nimea_ryhma`, mutta se nimeää ryhmän ja aliryhmän alkiot 'pilkullisiksi', eli esimerkiksi se tallettaa ryhmän neutraalialkion muuttujaan `e'`.
Palauta mieleen funktion määritelmä. Edelleen, funktiota $f : A \to B$ sanotaan *bijektioksi*, jos se on
1. *injektio*, eli jos kaikille $x, y \in A : x \neq y \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(y)$,
2. *surjektio*, eli jos kaikille $y \in B$ on olemassa $x \in A$ siten, että $f(x) = y$, ts. jos $\{f(x) \mid x \in A\} = B$.

Tehtävä 1. Koodiarvoituksia

Käy läpi alla oleva koodi ISETLissä. Mitä näyttäisivät tekevän funktiot `testi1` ja `testi2`?

```
>   f := func(x);
>>   if x in {0,1,2} then return x+1; end if;
>   end func;
>   testi1 := func(f,A,B);
>>      return (forall x in A: is_defined(f(x))) and
>>        (forall x in A: f(x) in B);
>>   end func;
>
>   A := {0,1,2,3};
>   B := {0,1,2,3,4};
>   testi1(f,A,B);
>   testi1(f,A-{3},B-{1});
>   testi1(f,A-{3},B);
>
>   testi2 := func(f,A,B);
>>   if testi1(f,A,B) then
>>   return
>>   (forall x,y in A: ((x /= y) impl (f(x) /= f(y)))) and
>>   {f(x)|x in A} = B;
>>   end if;
>>   end func;
>
>   testi2(f,A,B);
>   testi1(f,A,B);
>   testi2(f,A-{3},B);
>   testi2(f,A-{3},B-{0,4});
```

ISETL-funktio `testi1`: ______________________________
ISETL-funktio `testi2`: ______________________________
Löydätkö funktioista parannettavaa?

Tehtävä 2. Homomorfismitesti

Oletetaan, että `G` ja `G'` on määritelty ajamalla `nimea_ryhma` ja `nimea_ryhma'`. **Kirjoita** ISETL-funktio `homomorfismiko`, joka testaa ensin onko kyseessä matemaattisesti ottaen edes funktio (ks. tehtävä 1), ja jos on, palauttaa arvon `true` tai `false` sen mukaan, päteekö homomorfisuusehto

$$f(a \circ b) = f(a) \circ' f(b)$$

kaikille $a, b \in G$. Voit tehdä 'riisutun mallin', joka saa syötteenään pelkästään ISETL-funktion `f`, kunhan käytettäessä pidetään huolta, että lähtöjoukko G ja maali G' sekä vastaavat operaatiot $\circ$ ja $\circ'$ ovat kulloinkin oikein nimetyt.
Tutki sitten, määrittelevätkö seuraavat funktiot homomorfismin ryhmien välille.
a) $f : \mathbf{Z}_{12} \to \mathbf{Z}_{12}$, $f(x) := 3x \bmod 12$ __________
b) $g : \mathbf{Z}_{12} \to \mathbf{Z}_{12}$, $g(x) := x +_{12} 3$ __________
c) $h : \mathbf{Z}_{20} \to \mathbf{Z}_{5}$, $h(x) := x \bmod 5$ __________
d) $u : \mathbf{Z}_{20} \to \mathbf{Z}_{7}$, $u(x) := x \bmod 7$ __________
e) s on funktio $\mathbf{Z}_{20}$:n aliryhmältä $\langle 4 \rangle$ ryhmälle $\mathbf{Z}_5$, $s(x) := 4x \bmod 5$ __________
f) t on funktio $\mathbf{Z}_{20}$:n aliryhmältä $\langle 4 \rangle$ ryhmälle $\mathbf{Z}_5$, $t(x) := 5x \bmod 5$ __________
g) $j : S_3 \to S_3$, $j(p) := [2,3,1] \circ p$ __________
h) $k : S_3 \to S_3$, $k(p) := [2,3,1] \circ [3,1,2]$ __________
i) $l : S_3 \to S_3$, $l(p) := apa^{-1}$, missä a on mikä tahansa joukon S_3 permutaatio. __________
j) $F : S_3 \to S_3$, $F(p) := [1,2,3]$ __________
k) $O : S_3 \to S_3$, $O(p) := [1,3,2]$ __________
l) $H : S_3 \to \mathbf{Z}_{20}$, $H(p) := 0$ __________
m) $U : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $U(z) := 7z$ __________
n) $T : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $T(z) := 7z + 2$ __________

Tehtävä 3.

Kirjoita ISETL-funktio `isomorfismiko`, jonka syötteenä on funktio f ja joka tarkistaa, onko f sekä homomorfismi että bijektio. Voit olettaa, että f on funktio joukolta `G` joukolle `G'`, eli että sekä `nimea_ryhma` että `nimea_ryhma'` on ajettu.
Mitkä tehtävän 2 homomorfismeista ovat isomorfismeja?
a) $f : \mathbf{Z}_{12} \to \mathbf{Z}_{12}$, $f(x) := 3x \bmod 12$ __________
b) $g : \mathbf{Z}_{12} \to \mathbf{Z}_{12}$, $g(x) := x +_{12} 3$ __________
c) $h : \mathbf{Z}_{20} \to \mathbf{Z}_{5}$, $h(x) := x \bmod 5$ __________
d) $u : \mathbf{Z}_{20} \to \mathbf{Z}_{7}$, $u(x) := x \bmod 7$ __________
e) s on funktio $\mathbf{Z}_{20}$:n aliryhmältä $\langle 4 \rangle$ ryhmälle $\mathbf{Z}_5$, $s(x) := 4x \bmod 5$ __________
f) t on funktio $\mathbf{Z}_{20}$:n aliryhmältä $\langle 4 \rangle$ ryhmälle $\mathbf{Z}_5$, $t(x) := 5x \bmod 5$ __________
g) $j : S_3 \to S_3$, $j(p) := [2,3,1] \circ p$ __________
h) $k : S_3 \to S_3$, $k(p) := [2,3,1] \circ [3,1,2]$ __________
i) $l : S_3 \to S_3$, $l(p) := apa^{-1}$, missä a on mikä tahansa joukon S_3 permutaatio __________
j) $F : S_3 \to S_3$, $F(p) := [1,2,3]$ __________
k) $O : S_3 \to S_3$, $O(p) := [1,3,2]$ __________
l) $H : S_3 \to \mathbf{Z}_{20}$, $H(p) := 0$ __________
m) $U : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $U(z) := 7z$ __________
n) $T : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $T(z) := 7z + 2$ __________