ISETL-Harjoitus 11, 1999. Homomorfismi (jatkoa). Rengas

Kopioi taas tiedostojen `ryhma.ise` ja `joukot.ise` uudet versiot WWW-sivulta
`http://www.joensuu.fi/matemluonto/matematiikka/kurssit/algebra/Materiaalia/index.html`

Lataa ne sitten ISETLW:n muistiin `!include`:lla.

Tehtävä 1. Askartelua

a) Tutki käskyllä `!pp` funktioiden `funktioko`, `bijektioko`, `homomorfismiko` ja `isomorfismiko` koodia ja toimintaa. Mitä ne palauttavat, jos parametrina annettava sääntö ei ole matemaattisesti ottaen funktio? ____________________
Mitä tekee funktio `pot'` ? ____________________
b) Mitä etsitään seuraavassa? ____________________

```
>   !setrandom off
>   nimea_ryhma(Z6, s6);
>   nimea_ryhma'(Z7-{0}, k7);
>   G; #G;   G'; #G';
>
>   f := |k -> k+1|;
>   {f(x) | x in G};
>   bijektioko(f,G,G');
>   homomorfismiko(f);              $ Oliko ryhmät nimetty oikein?
>   f(3 .o 4);
>   f(3) .o' f(4);
>
>   [5**k mod 7| k in [0..5]];
>   g := |k -> (5**k) mod 7|;
>   {g(x)| x in G};
>   isomorfismiko(g);               $ Oliko ryhmät nimetty oikein?
>   [[k,g(k)] | k in [0..5]];
```

Mitä vikaa oli funktiossa f? ____________________
Onkohan muita isomorfismeja kuin g ryhmästä $(\mathbf{Z}_6, +_6)$ ryhmään $(\mathbf{Z}_7 \setminus \{0\}, *_7)$? _

Tehtävä 2. Etsitään isomorfismeja

Muodosta jokin isomorfismi h ryhmien $(\mathbf{Z}_{10}, +_{10})$ ja $(\mathbf{Z}_{11} \setminus \{0\}, *_{11})$ välille:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h(x)$	1										

Voit käyttää apuna ISETL-koodia

```
>   nimea_ryhma(Z(10),s(10)); G;
>   nimea_ryhma'(Z(11)-{0},k(11)); G';
>   yhden_virittamat'(G',o');
>   {a | a in G-{0}: {pot'(a,k)| k in G} = G'};
>   f := |k -> pot'(2,k) mod 11|;
>   [[k,f(k)] | k in [0..10]];
```

Tehtävä 3. Homomorfismin ydin

Oletetaan, että `G` ja `G’` on määritelty ajamalla `nimea_ryhma` ja `nimea_ryhma’`. Kirjoita ISETL-funktio `ydin`, joka saa syötteinään funktion f. Sen tulee palauttaa niiden joukon `G` alkioiden joukko, jotka f kuvaa ryhmän `G’` neutraalialkiolle.
Etsi sitten seuraavien homomorfismien ytimet:
a) $f : \mathbf{Z}_{12} \to \mathbf{Z}_{12}$, $f(x) := 3x \bmod 12$ ________
b) $h : \mathbf{Z}_{20} \to \mathbf{Z}_5$, $h(x) := x \bmod 5$ ________
c) s on funktio $\mathbf{Z}_{20}$:n aliryhmältä $\langle 4 \rangle$ ryhmälle $\mathbf{Z}_5$, $s(x) := 4x \bmod 5$ ________
d) t on funktio $\mathbf{Z}_{20}$:n aliryhmältä $\langle 4 \rangle$ ryhmälle $\mathbf{Z}_5$, $t(x) := 5x \bmod 5$ ________
e) $l : S_3 \to S_3$, $l(p) := apa^{-1}$, missä a on mikä tahansa joukon S_3 permutaatio ________
f) $F : S_3 \to S_3$, $F(p) := [1, 2, 3]$ ________
g) $U : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $U(z) := 7z$ ________

Tehtävä 4. Osittelulait

Tarkastellaan nyt joukkoja, joissa on määritelty kaksi laskutoimitusta. Tavallisessa aritmetiikassa on olemassa sekä kerto- että yhteenlaskua koskevat ns. *osittelulait*: kaikille $a, b, c \in \mathbf{R}$ pätee

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{ja} \quad (a + b)c = ac + bc.$$

a) Kirjoita funktio `ositteluko`, jonka syötteenä on joukko `R` ja kaksi laskutoimitusta `s` ja `k`, joista ensimmäistä kutsumme yhteenlaskuksi ja toista kertolaskuksi. Funktiosi pitää palauttaa `true` tai `false` sen mukaan, ovatko osittelulait voimassa.
b) Ovatko osittelulait voimassa systeemeissä
$(\mathbf{Z}_5, +_5, *_5)$ ________
$(\mathbf{Z}_5, *_5, +_5)$ ________
$(\mathbf{Z}_{12}, +_{12}, *_{12})$ ________
c) Keksi kaksi laskutoimitusta joukossa $\mathbf{Z}_6$, joille `ositteluko` palauttaa arvon `false`. Eka on $\circ$: ________ toka on $*$: ________

Tehtävä 5. Rengas

Määritelmä. Kolmikko $(R, +, \cdot)$ on rengas, jos
(i) pari $(R, +)$ on Abelin ryhmä,
(ii) laskutoimitus $\cdot$ on liitännäinen,
(iii) osittelulait: kaikille $a, b, c \in R$ on voimassa

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

a) Kirjoita funktio `onko_rengas`, jonka syötteenä on joukko `R` ja kaksi laskutoimitusta `s` ja `k`, ja joka tutkii, onko kolmikko `(R,s,k)` rengas.
b) Selvitä mitkä seuraavista kolmikoista ovat renkaita:

$(\mathbf{Z}_6, +_6, *_6)$	$(\mathbf{Z}_{11}, +_{11}, *_{11})$
$(\mathbf{Z}_{11}, +_8, *_8)$	$(\mathbf{Z}_{11} \setminus \{0\}, *_{11}, +_{11})$
$(\mathbf{N}, +, \cdot)$	$(\mathbf{Z}, +, \cdot)$
$(2\mathbf{Z}, +, \cdot)$ (parilliset)	$(\mathbf{Z}\setminus 2\mathbf{Z}, +, \cdot)$ (parittomat)
$(\mathbf{Q}, +, \cdot)$	$(\mathbf{R}, +, \cdot)$
$(\mathbf{C}, +, *)$	$(2{\times}2 - \text{matriisit}, +, *)$