ISETL-Harjoitus 12, 1999. Matriisit renkaasta ja renkaana

Tehtävä 1. Askartelua

ISETLissä ei ole valmiina kompleksilukujen, vektorien eikä matriisien laskutoimituksia, vaan ne on tarkoitettu itse muodostettaviksi. Selvitä mitä tehdään seuraavissa koodinpätkissä:

```
>   2*4 + 5*3; (2*4) + (5*3);
>   A := [2,5]; B := [4,3];       $ käytä ISOJA ja pieniä
>   A + B;                        $ kirjaimia harkiten!
>   A(1); A(2); B(1); B(2);
>   [A(1) + B(1), A(2) + B(2)];
>   Vs := |X,Y -> [X(1) + Y(1), X(2) + Y(2)]|;
>   Vs(A,B); A .Vs B; B .Vs A;
>   [5,-6] .Vs [-7,-2];           $ tulos:________________
```

Mitä tekee operaattori Vs ? ______________________________

```
>     A; B; A * B;
>   A(1)*B(1) + A(2)*B(2);
>   Vk := |X,Y -> X(1)*Y(1) + X(2)*Y(2)|;
>   Vk(A,B); A .Vk B = B .Vk A;
>   [4,6] .Vk [-5,2];             $ tulos:________________
```

Mitä tekee operaattori Vk ? ______________________________

```
>   C := [[3,4],[2,5]]; D := [[2,4],[3,1]]; C; D;
>   C(1); C(2);
>   C(1)(1); C(1)(2); C(2)(1); C(2)(2);
>
>   Ms := func(X,Y);
>>   return
>>   [[X(1)(1) + Y(1)(1), X(1)(2) + Y(1)(2)],
>>     [X(2)(1) + Y(2)(1), X(2)(2) + Y(2)(2)]];
>>   end func;
>   C; D; C .Ms D; D .Ms C;       $ tulos:________________
```

Mitä tekee Ms ? ______________________________

```
>   Mk := func(X,Y);
>>   return
>>   [[X(1)(1)*Y(1)(1) + X(1)(2)*Y(2)(1),
>>      X(1)(1)*Y(1)(2) + X(1)(2)*Y(2)(2)],
>>     [X(2)(1)*Y(1)(1) + X(2)(2)*Y(2)(1),
>>      X(2)(1)*Y(1)(2) + X(2)(2)*Y(2)(2)]];
>>   end func;
>  C; D; C .Mk D; D .Mk C;        $ tulos:________________
```

Mitä tekee Mk ? ______________________________

Tehtävä 2. Tutkailua

Kopioi taas tiedostojen `ryhma.ise` ja `joukot.ise` uudet versiot WWW-sivulta
`http://www.joensuu.fi/matemluonto/matematiikka/kurssit/algebra/Materiaalia/index.html`

Lataa ne sitten ISETLW:n muistiin `!include`:lla.

```
>   A; B;
>   Vs6 := |X,Y -> [X(1) .s6 Y(1), X(2) .s6 Y(2)]|;
>   A .Vs6 B; B .Vs6 A;
```

Mitä tekee operaattori `Vs6` ? ______________________________

```
>    2 .k6 4  .s6  5 .k6 3;
>   (2 .k6 4) .s6 (5 .k6 3);
```

Mitä tästä opimme? ______________________________

```
>   Vk6 := |X,Y -> (X(1) .k6 Y(1)) .s6 (X(2) .k6 Y(2))|;
>   A; B; A .Vk6 B; B .Vk6 A;
```

Mitä tekee operaattori `Vk6` ? ______________________________

Tehtävä 3. Matriisit renkaasta

ISETLissä matematiikan 2×2-matriisi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

voidaan esittää TUPLEna `[[a,b],[c,d]]`, jonka molemmat alkiot ovat kaksialkioisia TUPLEja. Matriisin ensimmäistä riviä vastaa ensimmäinen TUPLE `[a,b]` ja toista riviä toinen TUPLE `[c,d]`. Kun on määritelty ISETLissä esimerkiksi

```
>   A := [[3,6], [7,5]];
```

niin `A(1)(2)` viittaa ensimmäisen rivin toiseen alkioon 6 ja `A(2)(1)` toisen TUPLEN ensimmäiseen alkioon 7.
Tarkastellaan nyt 2×2−matriiseja, joiden alkiot ovat jostakin renkaasta $(R, +, \cdot)$***. Merkitään niiden joukkoa*** $M(R)$ (ISETLissä `MR`).
Kuten aikaisemminkin, matriisien *yhteenlaskussa* matriisit lasketaan *alkioittain* yhteen, nyt siis renkaan R yhteenlaskulla:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

Vastaavasti matriisien kertolasku $\cdot$ määritellään käyttäen renkaan R laskutoimituksia, ensimmäisen matriisin rivien ja toisen sarakkeiden pistetuloina:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}{\cdot}b_{11} + a_{12}{\cdot}b_{21} & a_{11}{\cdot}b_{12} + a_{12}{\cdot}b_{22} \\ a_{21}{\cdot}b_{11} + a_{22}{\cdot}b_{21} & a_{21}{\cdot}b_{12} + a_{22}{\cdot}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Renkaassahan voidaan muodostaa lineaarikombinaatioita $a{\cdot}b + c{\cdot}d$.

Tiedostosta `ryhma.ise` lienee latautunut ISETL-proseduuri `matrengas`, **katso**

```
> !pp matrengas
```

Sille annetaan parametreina joukko (`R`) ja kaksi laskutoimitusta (”yhteenlasku” ensin!), ja se tallettaa muuttujaan `MR` 2×2-matriisien joukon

$$M(R) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in R \right\}.$$

ISETL-funktio `Ms` suorittaa *matriisien yhteenlaskun* ja `Mk` *kertolaskun.*

> *Huomaa, että kertolaskut on ympäröitävä (tavallisilla) sulkeilla. Käyttäjän määrittelemistä operaatioista ei ISETL tiedä, kumpi laskutoimitus on voimakkaampi!*

Suorita komennot (älä laita suuria joukkoja $\mathbf{Z}_n$, miksi?)

```
> matrengas(Z2,s2,k2);
> MR;
> [[0,0],[1,0]] .Ms [[1,1],[0,0]];
> [[0,0],[1,0]] .Mk [[1,1],[0,0]];
> neutraali(MR,Mk);
> vaihdannainenko(MR,Mk);
> onko_rengas(MR,Ms,Mk);
```

Vastaa seuraaviin edellistä matriisisysteemiä koskeviin kysymyksiin ja väitteisiin:

a) (`MR`,`Ms`,`Mk`) on rengas.	Tosi Epätosi
b) Matriisikertolasku on vaihdannainen.	Tosi Epätosi
c) Matriisikertolaskulla on neutraalialkio.	Tosi Epätosi
d) Mikä on yhteenlaskun neutraalialkio?	____________________________

Tehtävä 4. Renkaiden nimeäminen

Tiedostoon `ryhma.ise` on lisätty myös seuraavat komennot:
`ositteluko, onko_rengas, nimea_rengas`
Komento `nimea_rengas` on analoginen tutun komennon `nimea_ryhma`-kanssa. Tutki tätäkin esimerkiksi komennoilla

```
> !pp nimea_rengas
> nimea_rengas(Z12, s12, k12);
> R; nolla; yksi; vasta(8);
>
> nimea_rengas(MR,Ms,Mk);
> R; nolla; yksi;
> vasta([[0,1],[1,1]]);
```

Tehtävä 5. Alirenkaista

a) Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas. Muistaen *aliryhmän* määritelmän, mikä voisi olla *alirenkaan* määritelmä? ______________________

____

____

b) Kirjoita ISETL-funktio `onko_alirengas`, joka tutkii, onko S renkaan R alirengas. Voit olettaa, että `nimea_rengas` on suoritettu, jolloin tarvitset funktion `onko_alirengas` syötteeksi vain joukon S. Funktio saa siis käyttää proseduurilla `nimea_rengas` luotuja "globaaleja muuttujia", kuten `R`, `Rs`, `nolla` jne.
Triviaali menetelmä, jossa tsekataan onko osajoukko rengas on hyvin työläs ja siis hidas. Mitä renkaan määritelmän ehtoja tämän funktion ei enää tarvitse uudelleen tutkia? ______________________

____

____

c) *Onko seuraava väite totta:* Jos $(A, +_n)$ on ryhmän $(\mathbf{Z}_n, +_n)$ aliryhmä, niin kolmikko $(A, +_n, *_n)$ on renkaan $(\mathbf{Z}_n, +_n, *_n)$ alirengas. ______________________
Todistus tai vastaesimerkki: ______________________

____

____

d) *Onko seuraava väite totta:* Jos $(B, *_p)$ on ryhmän $(\mathbf{Z}_p \setminus \{0\}, *_p)$ aliryhmä, niin kolmikko $(B, +_p, *_p)$ on renkaan $(\mathbf{Z}_p, +_p, *_p)$ alirengas. ______________________
Todistus tai vastaesimerkki: ______________________

____

____

Tehtävä 6. Matriisirenkaan alirenkaista

Suorita komennot `matrengas(Z3,s3,k3); nimea_rengas(MR,Ms,Mk);`
Montako alkiota nyt on joukossa `MR`, eli mitä ISETL antaa komennolla `#MR;` ? ____
Mitkä seuraavista joukoista ovat matriisirenkaan $M(\mathbf{Z}_3)$ alirenkaita?

a) $T_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbf{Z}_3 \right\}$ On Ei

b) $T_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{Z}_3 \right\}$ On Ei

c) T_3 on niiden matriisien joukko, joille on olemassa käänteisalkio matriisikertolaskun `Mk` suhteen. On Ei

Miksi? ______________________

d) Keksi itse kaksi joukkoa T_4 ja T_5, jotka ovat matriisirenkaan $M(\mathbf{Z}_3)$ ei-triviaaleja alirenkaita. ______________________

____

____