ISETL-Harjoitus 13, 1999. Kokonaisalue, kunta, ideaali

Kopioi taas tiedostojen `ryhma.ise` ja `joukot.ise` uudet versiot WWW-sivulta
`http://www.joensuu.fi/matemluonto/matematiikka/kurssit/algebra/Materiaalia/index.html`

Lataa ne sitten ISETLW:n muistiin `!include`:lla.
***Talleta tiedostoasi tavan takaa**, sillä ISETL on nyt tilttaillut, monella ryhmällä esimerkiksi Tehtävässä 2.*

Tehtävä 1. Askartelua

Tukiskellaan sivuluokkien säilymistä renkaan kertolaskun suhteen.
a) Suorita seuraavat käskyt ajatuksella ja kerro mitä niissä haetaan:

```
> !setrandom off
> Z12;
> S := {0,4,8};
> onko_alirengas(S,Z12,s12,k12);
> nimea_ryhma(Z12,s12,S);
> GmodH;
> Ho(4 .k12 8); Ho(2 .k12 9);
> forall a,b in Z12: ({x .k12 y | x in Ho(a), y in Ho(b)} in GmodH);
```

Tässä sivuluokkien tulo oli sivuluokka ____________________ Tosi Epätosi

b) Entä seuraavassa:

```
> matrengas(Z3,s3,k3);
> nimea_rengas(MR,Ms,Mk);
> T := {nolla,yksi,[[2,0],[0,2]]}; T;
> onko_aliryhma(T,MR,Ms);
> onko_alirengas(T,MR,Ms,Mk);
> nimea_ryhma(MR,Ms,T);
> #G; e; H;
> GmodH;
> #GmodH; arb(GmodH);
>
> sivu1 := Ho(arb(MR)); sivu1; sivu1 in GmodH;
> sivu2 := Ho(arb(MR)); sivu2; sivu2 in GmodH;
> tulo := {A .Mk B | A in sivu1, B in sivu2}; tulo; tulo in GmodH;
```

Tässä sivuluokkien tulo oli sivuluokka ____________________ Tosi Epätosi

Tehtävä 2. Ideaalin määritelmä

Olkoon R rengas ja I sen alirengas. Silloin I on ryhmän R normaali aliryhmä. Kun haluamme, että (yhteenlaskun suhteen muodostettujen) sivuluokkien tulo on taas sivuluokka, pitää siis olla enemmän kuin alirengas. Osoittautuu, että sopiva ehto on se, että alirengas "imee" tulot seuraavalla tavalla:

Kaikilla $a \in I$, $r \in R$ on $ar \in I$ ja $ra \in I$.

a) Muodosta ISETL-funktio `onko_ideaali(S,R,yht,kert)`, joka palauttaa totuusarvona tiedon, onko S ideaali. Yhdistä siis alirengastesti ja yllä oleva ehto. Palauttakoon funktiosi arvon `OM`, jos kyseessä ei olekaan alirengas.
b) Kokeile funktiotasi:

```
>  onko_ideaali({0,4,8},Z12,s12,k12);
>  onko_ideaali({0,5,8},Z12,s12,k12);
>
>  matrengas(Z3,s3,k3);
>  nimea_rengas(MR,Ms,Mk);
>  onko_ideaali({nolla},R,Rs,Rk);
>  T1 := {[[a,a],[0,0]] | a in Z3}; T1;
>  T2 := {[[a,0],[0,b]] | a,b in Z3}; T2;
>  T4 := {nolla,yksi,[[2,0],[0,2]]}; T4;
>  T5 := {[[a,b],[0,c]] | a,b,c in Z3}; #T5;
>  onko_ideaali(T1,R,Rs,Rk);
>  onko_ideaali(T2,R,Rs,Rk);
>  onko_ideaali(T4,R,Rs,Rk);
>  onko_ideaali(T5,R,Rs,Rk);
>
>  matrengas(Z4,s4,k4); #MR;
>  T := {[[a,b],[c,d]] | a,b,c,d in {0,2}}; #T;
>  onko_ideaali(T,MR,Ms,Mk);
```

Mitkä olivat ideaalieja? ______________________________

Tehtävä 3. Rengashomomorfismeista

a) Renkaidenkin yhteydessä voidaan puhua isomorfismeista ja homomorfismeista. Olkoot $(R,+,\cdot)$ ja $(R',\oplus,\odot)$ renkaita, ja olkoon $f : R \to R'$. Mikä voisi olla rengashomomorfismin määritelmä?

____

____

Entä rengasisomorfismin?

____

b) Tiedostoon `ryhma.ise` on lisätty proseduuri `nimea_rengas'`, joka on analoginen komennon `nimea_ryhma'` kanssa. Tee ISETL-funktio `rhomomorfismiko`, jonka syötteenä on funktio f ja joka olettaa, että olet ajanut komennot `nimea_rengas` ja `nimea_rengas'`, ja joka tutkii, onko funktio f rengashomomorfismi.
c) Millaisia olivat ryhmien tapauksessa homomorfismit $h : \mathbf{Z}_n \to \mathbf{Z}_k$?

____

d) Testaa, toimivatko ne myös rengashomomorfismeina.

Tehtävä 4. Lisää askartelua

a) Suorita seuraavat käskyt ajatuksella ja kerro mitä niissä haetaan:

```
>   !setrandom off
>   nimea_rengas(Z12,s12,k12);
>   R; nolla; yksi; 8 .Rs 7; 8 .Rk 7; vasta(5);
>   forall a,b in R: (a /= nolla) and (b /= nolla) impl a .Rk b /= nolla;
>   choose a,b in R: (a /= nolla) and (b /= nolla) and a .Rk b = nolla;
>   choose a,b in R: (a /= nolla) and (b /= nolla) and a .Rk b = nolla;
>
>   nimea_rengas(Z13,s13,k13);
>   forall a,b in R: (a /= nolla) and (b /= nolla) impl a .Rk b /= nolla;
```

Koodissa etsitään ____________________________________

Systeemissä $(\mathbf{Z}_{12}, +_{12}, *_{12})$ niitä ovat esimerkiksi ____________________ Ei ole

Systeemissä $(\mathbf{Z}_{13}, +_{13}, *_{13})$ niitä ovat esimerkiksi ____________________ Ei ole

b) Mitä tekee seuraava funktio, kun sille annetaan parametrina joukko J ja kaksi laskutoimitusta? ____________________________________

```
>  ZD := func(J,yht,kert);
>>  local Jnolla;
>>  Jnolla := neutraali(J,yht);
>>  return
>>  {[a,b] | a,b in J:
>>  (a /= Jnolla) and (b /= Jnolla) and a .kert b = Jnolla};
>>  end func;
```

Mitkä seuraavista palauttavat tyhjän joukon?

```
>  ZD(Z13,s13,k13); ZD(Z12,s12,k12); ZD(Z13,s12,k13); ZD(Z13,s13,k12);
```

Tehtävä 5. Liekö nollantekijöitä?

a) Kirjoita funktio `onko_nollantekijoita`, joka saa parametrina joukon ja kaksi laskutoimitusta (normaalissa järjestyksessään), ja palauttaa arvon `true` tai `false` sen mukaan onko systeemissä nollantekijöitä. Funktiosi palauttakoon arvon `OM`, jos ensimmäisen laskutoimituksen suhteen ei löydy neutraalialkiota.

b) Testaa funktiotasi systeemeillä $(\mathbf{Z}_{12}, +_{12}, *_{12})$ ja $(\mathbf{Z}_{13}, +_{13}, *_{13})$.

Rengaassa $(\mathbf{Z}_{12}, +_{12}, *_{12})$ on nollantekijöitä ____________________ Tosi   Epätosi

Renkaassa $(\mathbf{Z}_{13}, +_{13}, *_{13})$ on nollantekijöitä ____________________ Tosi   Epätosi

Tehtävä 6. Kokonaisalue?

a) Kirjoita funktio `onko_kokonaisalue`, joka tarkastaa onko annettu systeemi $(R, +, \cdot)$ kokonaisalue. Voit käyttää valmiita funktioita `onko_rengas` jne

b) Tarkista, ovatko seuraavat kokonaisalueita:
Rengas $(\mathbf{Z}_{12}, +_{12}, *_{12})$ ____ On Ei

Rengas $(\mathbf{Z}_{13}, +_{13}, *_{13})$ ____ On Ei

c) Tutki, voidaanko renkaasta $(\mathbf{Z}_{12}, +_{12}, *_{12})$ saada kokonaisalue poistamalla sopivat alkiot.
Mitkä vähintäin on poistettava? ____________________________________
Millaisen kokonaisalueen saat? _____________________________________
Vihje. Voit tutkia vaikkapa aluksi koodia

```
> EINTZ12 :=
>>  Z12 - {a | a in Z12-{0}:
>>  (exists b in Z12-{0}: a .k12 b = 0)}; EINTZ12;
> suljettuko(EINTZ12,k12);
> suljettuko(EINTZ12,s12);
```

Tehtävä 7. Supistussäännöt, yhtälö

Tutki taas renkaita $(\mathbf{Z}_{12}, +_{12}, *_{12})$ ja $(\mathbf{Z}_{13}, +_{13}, *_{13})$.
a) Onko renkaan yhtälöissä luvallista "jakaa" yhtälö puolittain nollasta poikkeavalla luvulla?
Matemaattis-loogisella kielellä: onko kaikille $a, x, y \in R$ totta

$$a \neq 0 \;\&\; ax = ay \quad \Rightarrow \quad x = y \tag{1}$$
$$a \neq 0 \;\&\; xa = ya \quad \Rightarrow \quad x = y \tag{2}$$

b) Millaisilla yhtälöillä $ax = b$ on noissa renkaissa yksikäsitteiset ratkaisut?
Renkaassa $(\mathbf{Z}_{12}, +_{12}, *_{12})$ _____________________________________
Renkaassa $(\mathbf{Z}_{13}, +_{13}, *_{13})$ _____________________________________

Tehtävä 8. Kunta

a) Muodosta funktio `onko_kunta`, joka tutkii onko annettu systeemi kunta (noudata samoja periaatteita kuin edellisissäkin).

b) Tutki mitkä edellä käsitellyistä rengassysteemeistä ovat kuntia.

Kuntia ovat: ____
____