Algebra, testi 2, 2.11.1999

Nimi: ____

Kukin tehtävistä 1-12 on yhden pisteen arvoinen.
Merkitse kunkin kohdan *vasemmalle* puolelle T (= tosi) tai E (= epätosi):

1. Jos ryhmän laskutoimitus $\circ$ ei ole vaihdannainen, on kaikilla neutraalialkiosta poikkeavilla pareilla $a \circ b \neq b \circ a$.

2. Ryhmällä voi olla useita neutraalialkioita.

3. Kaikki enintään kolmen alkion ryhmät ovat Abelin ryhmiä.

4. Ryhmä voi sisältää osajoukkonaan ryhmän, jolla on eri neutraalialkio kuin itse ryhmällä.

5. Jokaisessa ryhmässä on ainakin kaksi alkiota, jotka ovat itsensä käänteisalkioita.

6. Kahden ryhmän leikkaus on ryhmä.

7. Olkoon G joukko ja $\circ$ siellä liitännäinen laskutoimitus. Jos $H \subseteq G$ ja $(H, \circ)$ on ryhmä, niin myös $(G, \circ)$ on ryhmä.

8. Aliryhmän alkioilla on samat käänteisalkiot kuin itse ryhmässä lasketut.

9. Ryhmä on syklinen, jos sen jokainen aliryhmä on syklinen.

10. Ryhmässä on jokaisella yhtälöllä $x^2 = a$ ainakin yksi ratkaisu.

11. $\mathbf{Z}_{31}$ varustettuna yhteenlaskulla modulo 31 on syklinen Abelin ryhmä, jonka virittäjäksi käy sen jokainen neutraalialkiosta poikkeava alkio.

12. $(\mathbf{Z}_{31} \setminus \{0\}, *_{31})$ on ryhmän $(\mathbf{Z}_{62} \setminus \{0\}, *_{62})$ aliryhmä.

Kukin tehtävistä 13-18 on kahden pisteen arvoinen.
Kirjoita vastauksesi viivalle:

13. Ryhmässä $(\mathbf{Z}_{14}, +_{14})$ on $5^{-1} =$ ______________________

14. Ryhmässä $(\mathbf{Z}_{13} \setminus \{0\}, *_{13})$ on $7 *_{13} 9 =$ ______________________

15. Ryhmässä $(\mathbf{Z}_{13} \setminus \{0\}, *_{13})$ on $5^{-1} =$ ______________________

16. Ryhmässä $(\mathbf{Z}_{13} \setminus \{0\}, *_{13})$ yhtälön $9 *_{13} x = 2$ ratkaisu on $x =$ ______________

17. Permutaatioryhmässä $(S_4, \circ)$ yhtälön $x \circ [3, 2, 4, 1] = [2, 3, 1, 4]$ ratkaisu on $x =$ ________

18. Ryhmässä $(\mathbf{Z}_{24}, +_{24})$ alkion 6 virittämä aliryhmä $\langle 6 \rangle =$ ______________________