Algebra, testi 3, 23.11.1999

Nimi: ____________________

Kukin tehtävistä 1-12 on yhden pisteen arvoinen.
Merkitse kunkin kohdan *vasemmalle* puolelle T (= tosi) tai E (= epätosi):

1. Jos ryhmän G laskutoimitus $\circ$ ei ole vaihdannainen, on kaikilla neutraalialkiosta poikkeavilla alkioilla a, $b \in G$, $a \neq b$, myös $a \circ H \neq b \circ H$.

2. Jos ryhmän G laskutoimitus $\circ$ ei ole vaihdannainen, on kaikilla neutraalialkiosta poikkeavilla alkioilla $a \in G$ voimassa $a \circ H \neq H \circ a$.

Olkoon H ryhmän $(G, \circ)$ aliryhmä ja $x, y \in G$. Silloin on voimassa

3. $Hx = Hy \;\Leftrightarrow\; x = y$.

4. $Hx = Hy \;\Leftrightarrow\; x \circ y \in H$.

5. $Hx \neq Hy \;\Leftrightarrow\; Hx \cap Hy = \emptyset$.

6. Sivuluokilla Hx ja yH on sama kertaluku.

---

7. Pariton määrä alkioita aiheuttaa sen, että ryhmällä ei ole muita aliryhmiä kuin triviaalit.

8. Normaalit aliryhmät ovat Abelin ryhmiä.

9. Jos ryhmä G on syklinen, ja $f : G \to G'$ on homomorfismi, niin G' on syklinen.

10. Jos $(G, \circ)$ on ryhmä ja H sen aliryhmä, niin identtinen kuvaus $\mathrm{id}(x) := x$ on homomorfismi $H \to G$.

11. Jos $f : G \to G'$ on homomorfismi, niin aliryhmän alkukuvajoukko on aina aliryhmä.

12. Isomorfismin ydin on aina pelkän neutraalialkion muodostama.

Kukin tehtävistä 13-18 on kahden pisteen arvoinen.
Kirjoita vastauksesi viivalle:

13. Ryhmässä $(\mathbf{Z}_{14}, +_{14})$ on aliryhmän $H := \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ ja alkion 3 määräämä sivuluokka $H +_{14} 3 =$ ____________________

14. Ryhmässä $(\mathbf{Z}_{13} \setminus \{0\}, *_{13})$ on aliryhmän $H := \{1, 5, 8, 12\}$ ja alkion 3 määräämä sivuluokka $H *_{13} 3 =$ ____________________

15. Permutaatioryhmässä $(S_3, \circ)$ on aliryhmän $H := \{[1, 2, 3], [2, 1, 3]\}$ määräämä sivuluokka $[3, 2, 1] \circ H =$ ____________________

16. Muodosta isomorfismi permutaatioryhmän $(S_4, \circ)$ kiertojen muodostaman ryhmän ja sopivan $\mathbf{Z}_n$:n kanssa. ____________________

17. Keksi ei-triviaali homomorfismi ryhmästä $\mathbf{Z}_{12}$ ryhmälle $\mathbf{Z}_4$. ____________________

18. Ryhmälle $(\mathbf{Z}_{24}, +_{24})$ on alkion 6 virittämän aliryhmän $\langle 6 \rangle$ määräämä tekijäryhmä =

____