Algebra 2, syksy 2003, laskuharjoitus 1

1. Olkoon annettu napakoordinaateissa käyrä $r = \sin(2\theta)$. Tätä sanotaan nelilehtiseksi ruusuksi; piirrä kuva. Näytä, että tämä käyrä on varieteetti. Etsi siis sellainen polynomi f, että käyrä saadaan sen nollakohtien joukkona: $f(x, y) = 0$.

2. Olkoon annettu käyrä parametrimuodossa: $x = \cos(t)$, $y = \cos(2t)$. Näytä, että käyrä on osa erästä varieteettia. Mikä osa?

3. Tarkastellaan käyrää/varieteettia $\mathbf{V}(f)$, missä

$$f(x, y) = y^2 + x^3 - 2x^2$$

   Piirrä kuva. Tälle voidaan konstruoida parametrisointi seuraavasti. Tarkastellaan suoraa $x = 1$, ja sen pistettä $(1, t)$. Piirrä suora S tämän pisteen ja origon kautta. Osoita, että S leikkaa $\mathbf{V}(f)$:n yhdessä pisteessä, ja tämä antaa $\mathbf{V}(f)$:n parametrisoinnin. Laske kyseinen parametrisointi.

4. Tarkastellaan joukkoja

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}[\sqrt{2}] &= \left\{a + b\sqrt{2} \,|\, a \ , \ b \in \mathbb{Q}\right\} \\
\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] &= \left\{a + b\sqrt[3]{2} \,|\, a \ , \ b \in \mathbb{Q}\right\} \\
\mathbb{Z}[i] &= \left\{a + bi \,|\, a \ , \ b \in \mathbb{Z}\right\} \\
\mathbb{Z}_4 &= \left\{0, 1, 2, 3\right\} \\
\mathbb{J}_2[x] &= \left\{p \,|\, p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ , \ a_i \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

   Ovatko yllämainitut joukot kuntia tai renkaita?

   Viimeistä edellisessä tapauksessa määritellään laksutoimitukset siten, että ensin suoritetaan tavanomainen $\mathbb{Z}$:n laskutoimitus, ja sitten tulos jaetaan 4:llä, ja otetaan jakojäännös.

   Viimeisessä tapauksessa yhteenlasku on tavanomainen polynomien yhteenlasku, ja kertolasku määritellään siten, että ensin lasketaan tavanomainen kertolasku, ja sitten asetetaan $x^k = 0$ jos $k > 2$. Erityisesti olkoon $2 + x \in \mathbb{J}_2[x]$. Onko olemassa $(2 + x)^{-1} \in \mathbb{J}_2[x]$?