Algebra 2, syksy 2003, laskuharjoitus 2

1 Peruskomentoja

Tässä harjoituksessa tutustutaan siihen miten *Singularilla* käsitellään yhden muuttujan polynomeja. Kaikki alkaa siitä, että määritellään *rengas*, jossa työskennellään:

> ring r=0,x,dp;

Tässä > on *Singularin* kehoite. Renkaalle on annettu nimi r. Nolla tarkoittaa, että polynomin kertoimet ovat rationaalilukuja[1] ja polynomien muuttujan nimenä on x. Määre dp liittyy siihen, miten polynomin termit järjestetään. Yhden muuttujan tapauksessa tämä järjestys on yksinkertaisesti seuraava: $x^n < x^k$, jos $n < k$. Myöhemmin palataan siihen, mitä dp tarkoittaa usean muuttujan tapauksessa.

Nyt voidaankin sitten määritellä muutama polynomi:

```
> poly p=1+x+x^2;
> poly q=5-2*x-(x^4)/3;
```

Huomaa, että toisessa komennossa sulut ovat välttämättömät, muuten tulee virheilmoitus. (Miksi?). Kokeile vaikkapa komentoja:

```
> p/3; (p^2)/7; p*q+x^5;
```

Samalle riville voi siis laittaa useampia komentoja.

Renkaan kertoimet ovat tyyppiä number:

```
> number n=123/45; n; n*p;
```

Huomaa, että osoittajan ja nimittäjän yhteiset tekijät supistetaan automaattisesti.

Kun joku muuttujanimi on otettu käyttöön, niin sen tyyppiä ei voi muuttaa; esimerkiksi nyt komento

```
> poly n=2+x;
```

aiheuttaisi virheilmoituksen. Tällaisissa tapauksissa muuttuja pitää ensin "vapauttaa" ennen tyypin vaihtoa komennolla kill(n);.

Jos haluaa kompleksikertoimisia polynomeja, niin toimitaan seuraavasti. Määritellään uusi rengas:

```
> ring r1=(0,i),x,dp; minpoly=i^2+1;
```

Nyt siis i on imaginaariyksikkö. Komento minpoly tarkoittaa, että imaginaariyksikkö voidaan algebrallisesti karakterisoida vaatimuksella $i^2 + 1 = 0$. Kokeile komentoja

```
> i^3+2*i^6; poly p1=i*x+(3-2*i)*x^3; poly q1=2*i+(1+i)*x^4; p1*q1;
```

Huomaa, että polynomit p ja q eivät ole määriteltyjä renkaassa r1. Renkaaseen r voidaan palata komennolla setring r;. Polynomeja (ja muita objekteja) voidaan kuitenkin "hakea" toisesta renkaasta komennolla fetch:

```
> poly w=fetch(r,p); w;
```

Jos sitten halutaan, että polynomin kerroin riippuu jostain parametrista, niin menetellään kuten edellä, mutta ei anneta mitään minimipolynomia:

```
> ring r2=(0,a),x,dp;
> poly p2=a*x+x^3/(1+a); poly q2=2*a/(1+a^2)+a^3*x^4;
> number n2=(1-a)/(1+a); n2^2; n2+p2*q2;
```

Renkaan r2 polynomien kertoimet ovat siis parametrin/muuttujan a rationaalifunktioita.

1. Nolla siksi, että rationaalilukujen *karakteristika* on nolla.

Palataan vielä takaisin renkaaseen r. Polynomin kertoimet ja monomit saadaan komennon coef avulla. Kokeile seuraavaa:

```
> matrix m=coef(q,x); m; print(m); m[1,2]*m[2,2];
```

Koska polynomin korkein termi on erikoisasemassa, on sitä varten omia komentoja:

```
> lead(q); leadcoef(q); leadexp(q); leadmonom(q);
```

2 Tehtäviä

Renkaat r, r1 ja r2 ovat kuten yllä.

1. Jakolaskuun on komento division. Jos siis annetaan polynomit f ja g , niin division(f,g) antaa polynomit q ja r siten, että $f = qg + r$, missä $r = 0$ tai $\deg(r) < \deg(g)$. Vastaus tulee listana, jossa on 3 komponenttia. Halutut polynomit saadaan parhaiten seuraavasti.

   ```
   > list li=division(f,g); poly q=li[1][1,1]; poly rem=li[2][1];
   ```

   Listan kolmannesta alkiosta ei tässä yhteydessä tarvitse välittää. Määrittele joitain polynomeja, ja kokeile tätä komentoa.

2. Tutustu komentoon gcd . Samalla komennolla voi laskea sekä kokonaislukujen että polynomien suurimman yhteisen tekijän. Olkoon $f_1 = x^4 + x^2 + 1$, $f_2 = x^4 - x^2 - 2x - 1$ ja $f_3 = x^3 - 1$. Laske näitten suurin yhteinen tekijä.
3. Olkoon $f_1 = x^3 + x^2 - 4x - 4$, $f_2 = x^3 - x^2 - 4x + 4$ ja $f_3 = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Olkoon edelleen $I = \langle f_1 , f_2, f_3 \rangle$ näitten virittämä ideaali. Olkoon $f = x^2 - 4$. Päteekö $f \in I$?
4. Komento extgcd (extended gcd) laskee hieman enemmän. Jos on annettu polynomit (tai kokonaisluvut) f ja g , niin tällä saadaan polynomit (kokonaisluvut) a, b ja c siten, että

   $$c = af + bg$$

   missä c on suurin yhteinen tekijä. Vastaus tulee listana, järjestyksessä $[c, a, b]$. Kokeile tätä komentoa edellisen kohdan tapaan.
5. Polynomeja voi derivoida komennolla diff. Derivoida voi vain muuttujan suhteen. Siis renkaassa r2 ei voi derivoida parametrin a suhteen. Kokeile tätä joihinkin yllä määriteltyihin polynomeihin.
6. Polynomeja voi jakaa tekijöihin komennlla factorize. Lopputulos voi riippua renkaasta. Tarkastele polynomia $p = x^4 - 1$ sekä renkaassa r että renkaassa r1. Miksi tulos on erilainen? Huomaa, että juurilausekkeita ei esiinny, vaan tekijöihin jaossa käytetään vain rationaalilukuja. Kokeile vaikkapa polynomia $q = x^3 - 1$.
7. Kompleksikertoiminen polynomi $f = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ voidaan jakaa tekijöihin:

   $$f = a_n (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$$

   missä $r_1 + \ldots. + r_k = n$. Siis $V(f) = \{c_1, \ldots, c_k\}$. Matala-asteisin polynomi, joka määrittää saman varieteetin on $f_r = a_n (x - c_1) \cdots (x - c_k)$. Olkoon

   $$f = x^{11} - x^{10} + 2x^8 - 4x^7 + 3x^5 - 3x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 1$$

   Laske f_r käyttämättä komentoa factorize.