Algebra 2, syksy 2003, laskuharjoitus 6

Laske seuraavat tehtävät *Singularin* avulla. Kaikissa tehtävissä on syytä käyttää aakkosjärjestystä. Miksi?

1. Seuraavissa tehtävissä päädytään joissain tapauksessa yhden muuttujan polynomiin, jonka nollakohdat pitäisi määrittää numeerisesti. Tämä onnistuu seuraavasti:

   ```
   > ring r=complex,x,dp;   // kompleksikertoimiset polynomit, kertoimet liukulukuja
   > poly p=2*x^7-3.5*i*x^4+2-i;   //  i on imaginaariyksikkö
   > LIB "solve.lib";   // tässä kirjastossa on numeerisia ohjelmia
   > laguerre_solve(p);  // tämä laskee p:n kaikki nollakohdat
   ```

   Kokeile tätä. Jos polynomi on reaalikertoiminen, niin voidaan yhtä hyvin määritellä `> ring r=real,x,dp;` . Joka tapauksessa `laguerre_solve` etsii tässäkin tapauksessa myös mahdolliset kompleksiset nollakohdat.

2. Matriisikomentoja saa käyttöön lataamalla kirjastot `matrix.lib` ja `linalg.lib`.

   ```
   > matrix m[3][3];   // m on nyt 3 x 3 nollamatriisi
   > m=...... ;   //  anna tässä m:n alkiot listana
   > det(m);   //  m:n determinantti
   > trace(m);   //  m:n jälki, siis lävistäjäalkioitten summa
   > transpose(ma); // m:n transpoosi
   > matrix yks=unitmat(3);  //  yks on 3 x 3 yksikkömatriisi
   ```

   Jos halutaan matriisin karakteristinen polynomi, niin renkaan perusmääritelmässä pitää olla muuttuja tätä varten. Jos esimerkiksi edellä määritellyn matriisin alkiot kuuluvat renkaaseen $\mathbb{K}[x,\lambda]$, ja matriisin alkiot *eivät* riipu λ:sta, niin karakteristinen polynomi saadaan komennolla `det(la*yks-m);` tai suoraan komennolla `charpoly(m,"la");`. Erityisesti jos matriisin alkiot ovat lukuja, niin karakteristinen polynomi on tavallinen yhden muuttujan polynomi, jolloin sen nollakohdat, siis kyseisen matriisin ominaisarvot saadaan kuten edellisessä tehtävässä on esitetty. Laske seuraavan matriisin ominaisarvot.

   $$A = \begin{pmatrix} 7.2 & -3.45 & 2.2 \\ 1.1 & 5.8 & 4 \\ -6.4 & 0.23 & -2.4 \end{pmatrix}$$

   Tunnetusti matriisin jälki on myös ominaisarvojen summa, ja determinantti on ominaisarvojen tulo. Tarkista tämä A:n tapauksessa.

3. Olkoon $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ jokin polynomi; f:n differentiaali/gradientti voidaan laskea komennolla `jacob`: `> ideal i=jacob(f);`. Siis tässä saadaan osittaisderivaatat listana, jotka tulkitaan sitten jonkin ideaalin virittäjäpolynomeiksi. Samalla komennolla saadaan edelleen Hessin matriisi: `> matrix h=jacob(i);`. Laske seuraavan funktion kriittiset pisteet, ja selvitä niitten laatu.

   $$f = (x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 1) + (x - 3/2)^2 + (y - 3/2)^2$$

   Kun sijoitetaan muuttujille arvoja, tarvitaan komentoa `subst`.

4. Tarkastellaan käyrää $V(f)$, missä

   $$f(x, y) = 4\,(x^2 + y^2)^2 - 4\,a\,x\,(x^2 - 3\,y^2) - 27\,a^2\,(x^2 + y^2) + 27\,a^4$$

ja a on jokin reaalinen parametri. Käyrää kutsutaan *apilakäyräksi* (hahmottele käyrää, niin huomaat mistä nimitys tulee). Näytä, että käyrällä on aina 3 singulaarista pistettä kaikilla $a \neq 0$.

5. Tarkastellaan *Talbotin käyrää* $V(f)$, missä

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = {} & (a^2x^2+b^2y^2)^3 - \big((2b^2-a^2)a^2x^2+(2a^2-b^2)b^2y^2\big)^2 - \\
& 12a^2b^2\big(a^2(a^2-b^2)\,x^4+2(a^2-b^2)^2\,x^2y^2+b^2(b^2-a^2)\,y^4\big) + \\
& 8a^2b^2\big((a^6+a^4b^2-4a^2b^4+2b^6)\,x^2+(2a^6-4a^4b^2+a^2b^4+b^6)\,y^2\big) \\
& -16a^4b^4(a^2-b^2)^2
\end{aligned}
$$

   Valitse a ja b siten, että

   → käyrällä on 6 singulaarista pistettä

   → käyrällä ei ole yhtään (reaalista) singulaarista pistettä

   Molemmissa tapauksissa hahmottele saamaasi käyrää.

Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sileä funktio/kuvaus; tällöin sen *gradientti/differentiaali* on vektori

$$df = \nabla f = (\partial f/\partial x_1, ..., \partial f/\partial x_n)$$

Piste $p \in \mathbb{R}^n$ on f:n *kriittinen piste*, jos $df(p) = 0$.

Kuvauksen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ differentiaali/Jacobin matriisi on

$$df = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_s/\partial x_1 & \cdots & \partial f_s/\partial x_n \end{pmatrix}$$

Gradientti on siis Jacobin matriisin erikoistapaus, kun $s = 1$. Jos taas $n = 1$, niin f määrittelee käyrän avaruudessa $\mathbb{R}^s$, ja df antaa kyseisen käyrän tangenttivektorin. Olkoon taas $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Tällöin f:n Hessin matriisi/toinen differentiaali on

$$d^2 f = \begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial x_1^2 & \cdots & \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_n & \cdots & \partial^2 f/\partial x_n^2 \end{pmatrix}$$

Huomaa, että Hessin matriisi on aina symmetrinen. Tästä seuraa, että Hessin matriisin kaikki ominaisarvot ovat reaalisia. Voidaan osoittaa, että kriittinen piste on

→ (paikallinen) *minimi*, jos Hessin matriisin kaikki ominaisarvot tässä pisteessä ovat positiivisia

→ (paikallinen) *maksimi*, jos kaikki ominaisarvot ovat negatiivisia

→ *satulapiste*, jos on sekä positiivisia että negatiivisia ominaisarvoja

Jos jokin ominaisarvoista on nolla, niin sanotaan, että kriittinen piste on *degeneroitunut*, jolloin Hessin matriisin perusteella ei välttämättä voida päätellä kriittisen pisteen laatua.

Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, missä $n = 2$ tai $n = 3$. Voidaan osoittaa, että $V(f)$ on sileä käyrä/pinta, jos $df \neq 0$ kaikissa $V(f)$:n pisteissä. Pistettä p, jolle pätee $f(p) = 0$ ja $df(p) = 0$, sanotaan $V(f)$:n *singulaariseksi pisteeksi*. Muut $V(f)$:n pisteet ovat *säännöllisiä*.