Algebra 2, syksy 2003, laskuharjoitus 7

1. Tarkastellaan suoria $t \mapsto (t, 0, 1)$ ja $t \mapsto (0, 1, t)$, ja näitä yhdistävää pintaa

$$\mathcal{S} \ : \ (t,u) \mapsto u \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-u) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

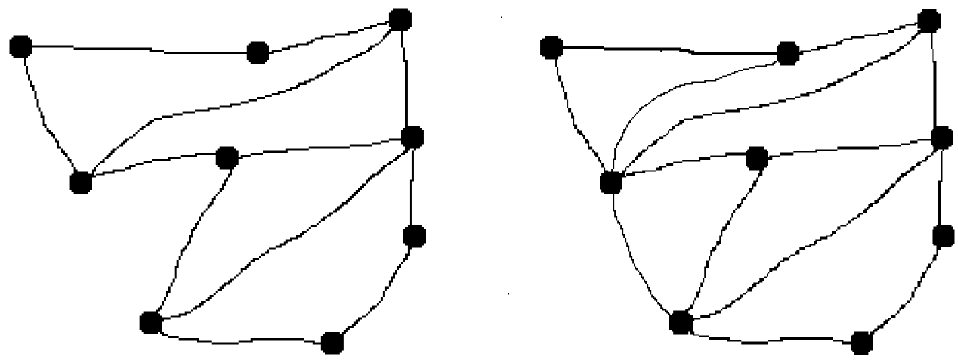
   Määritä sellainen f, että $\mathcal{S} = V(f)$, missä siis $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

2. Tarkastellaan pintaa

$$\mathcal{S} \ : \ (t,u) \mapsto \begin{pmatrix} (2+\cos(t))\cos(u) \\ (2+\cos(t))\sin(u) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

   Tämäkin on varieteetti, vaikka se on parametrisoitu trigonometrisia funktioita käyttäen. Etsi f siten, että $\mathcal{S} = V(f)$. Tarkista vielä, että $V(f)$:llä ei ole singulaarisia pisteitä. Ohje: merkitään $a = \cos(t)$, $b = \sin(t)$, $c = \cos(u)$ ja $d = \sin(u)$. Voidaan siis kirjoittaa: $x = (2+a)c$, $y = (2+a)d$ ja $z = b$. Parametrit a, b, c ja d eivät kuitenkaan ole riippumattomia, vaan niitä rajoittaa yhtälöt $a^2 + b^2 = 1$ ja $c^2 + d^2 = 1$.

3. Voidaanko oheiset graafit 3-värittää? Myönteisessä tapauksessa tutki vielä montako oleellisesti erilaista väritystä saadaan.



4. Tarkastellaan oheista Buchbergerin algoritmia. Siinä selvästi tehdään liikaa työtä, koska samoja S–polynomeja testataan jokaisella kierroksella. Muokkaa algoritmia siten, että jokainen algoritmin kuluessa syntyvä S–polynomi testataan vain kerran.

Buchbergerin algoritmi

`input:` $F=\{f_1,\ldots,f_s\}$, missä $f_i\in\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ ja $\mathcal{J}=\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$.

`output:` $G=\{g_1,\ldots,g_t\}$, siten, että G on Gröbner-kanta, $\mathcal{J}=\langle G\rangle$ ja $F\subset G$.

```
G:=F;
repeat
    GV:=G;   // vanha G
    t:= # GV; //  GV:n alkioitten lukumäärä
    for  i = 1... t − 1  do
        for  j = i + 1... t  do
            p := S(g_i, g_j);  // g_i:n ja g_j:n S–polynomi, g_i, g_j ∈ GV
            r := jakojäännös(p, GV);
            if  r ≠ 0 then
                G := G ∪ {r};
            endif
        endfor
    endfor
until  G=GV
```