**Analyysi 4**
**Kevät 2002**
**Palautettavat harjoitukset** $1/n$

Seuraavat tehtävät palautetaan kirjallisesti luennoilla erikseen sovittavaan ajankohtaan mennessä. Ratkaisuissa kannattaa olla huolellinen, sillä ne vaikuttavat kurssilta saatavaan arvosanaan.

1. Olkoon $\{x_1, \dots, x_n\}$ lineaarisesti riippumaton joukko avaruuden $\mathbb{F}^n$ vektoreita. Olkoon $x \in \mathbb{F}^n$. Osoita, että vektorilla $x$ on korkeintaan yksi muotoa $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ oleva esitys, missä $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$.

   *Vihje:* Oleta, että vektorilla $x$ on kaksi kyseistä muotoa olevaa esitystä. Lineaarista riippumattomuutta hyväksi käyttäen osoita, että kyseessä on yksi ja sama esitys.

2. Osoita, että kuvaus $T \in F(\mathbb{F}^3, \mathbb{F}^2)$,

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_2 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \end{pmatrix},$$

   on lineaarinen (ts. osoita, että $T \in L(\mathbb{F}^3, \mathbb{F}^2)$). Määrää kuvauksen $T$ matriisi.

   *Vihje:* Apua löytyy Lineaarialgebran kurssimateriaalista.

3. Oletetaan, että $\{x_n\}$ on suppeneva jono (rajapisteenä $x$) metrisessä avaruudessa $(M, d)$.

   (a) Osoita, että jokainen jonon $\{x_n\}$ osajono suppenee myös kohti pistettä $x$.

   (b) Osoita, että $\{x_n\}$ on Cauchyn jono.

   *Vihje:* Apua löytyy Analyysi 1:n kurssimateriaalista.

4. Olkoot $(M, d_M)$ ja $(N, d_N)$ metrisiä avaruuksia ja olkoon $f : M \longrightarrow N$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja:

   (a) $f$ on jatkuva joukossa $M$,

   (b) jokaiselle avoimelle joukolle $A \subset N$ joukko $f^{-1}(A) \subset M$ on avoin,

   (c) jokaiselle suljetulle joukolle $B \subset N$ joukko $f^{-1}(B) \subset M$ on suljettu.

*Vihje:* Apua löytyy Metristen avaruuksien kurssimateriaalista ja kurssikirjasta *Suominen & Vala:* Topologia. Lisäksi kannattaa vilkaista liitteenä olevaa kopiota kirjasta *Simmons:* Introduction to Topology and Modern Analysis. Tehtävä vastaa luentojen Lausetta 1.17(b).

5. Olkoon $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$ kuvaus. Osoita, että $f$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in \mathbb{F}^n$ jos ja vain jos kaikki komponentit $f_k$, $1 \leq k \leq m$, ovat jatkuvia pisteessä $x_0 \in \mathbb{F}^n$.

   *Vihje:* $\mathbb{F}^n$ ja $\mathbb{F}^m$ ovat metrisiä avaruuksia, metriikkana on luentorungon sivulla 5 annettu luonnollinen metriikka. Ratkaisun selventämiseksi kannattaa ko. metrisiä avaruuksia merkitä: $(\mathbb{F}^n, d_{\mathbb{F}^n})$ ja $(\mathbb{F}^m, d_{\mathbb{F}^m})$. Näin merkiten esim. väite "$f$ jatkuva pisteessä $x_0 \in \mathbb{F}^n$" tarkoittaa, että jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että

$$d_{\mathbb{F}^n}(x, x_0) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_{F^m}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$