Analyysi 4
Kevät 2002
Palautettavat harjoitukset $2/n$

Seuraavat tehtävät palautetaan kirjallisesti luennoilla erikseen sovittavaan ajankohtaan mennessä. Ratkaisuissa kannattaa olla huolellinen, sillä ne vaikuttavat kurssilta saatavaan arvosanaan.

1. Lauseen 1.26 (Cantorin leikkaus) todistuksessa itse asiassa totesimme, että suljettu joukko $Q \subset \mathbb{R}^n$ sisältää kaikki kasaantumispisteensä. Sillä, että joukko Q sisältää kaikki kasaantumispisteensä, tarkoitetaan itse asiassa, että $Q = \bar{Q}$. Näin ollen tehtävänäsi on osoittaa seuraava väite:

   Joukko $Q \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu jos ja vain jos $Q = \bar{Q}$.

   Jos ja kun joudut puhumaan palloympäristöistä, käytä $\mathbb{R}^n$:n standardia metriikkaa d.

2. Luennolla annettujen vihjeiden avulla todista luentorungon Lause 1.28. Tehtävän lyhentämiseksi voit kuitata infimumin osuuden toteamalla, että todistus on vastaavanlainen kuin supremumille.

3. Todista luentorungon Lause 2.3.

   Vihje: Voit käyttää todistuksesi runkona liitteenä olevaa kopiota.

4. Todista luentorungon Seuraus 2.4.

   Vihje: Jos joukko $A \subset \mathbb{R}$ on numeroituva, niin se voidaan esittää muodossa
   $$A = \bigcup_n \{x_n\},$$
   missä $x_n \in \mathbb{R}$ kaikilla n. Lisäksi tarvitset Lausetta 2.3 (eli tehtävää 3).

5. Todista luentorungon Lause 2.6.

   Vihje: Todista ensin, että $m^*(a+E) \leq m^*(E)$. Tämän jälkeen vastaava päättely tuottaa
   $$m^*(E) = m^*(-a + (a + E)) \leq m^*(a + E),$$
   joten $m^*(E) = m^*(a + E)$, ja väite on todistettu.