Analyysi 4
Kevät 2002
Palautettavat harjoitukset $3/n$

Seuraavat tehtävät palautetaan kirjallisesti luennoilla erikseen sovittavaan ajankohtaan mennessä. Ratkaisuissa kannattaa olla huolellinen, sillä ne vaikuttavat kurssilta saatavaan arvosanaan.

1. Olkoon $E \in \mathcal{M}$. Määritellään relaatio $\equiv$ joukossa $F(E, \widehat{\mathbb{R}})$ asettamalla
$$f \equiv g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x) \text{ m.k. joukossa } E,$$
missä m.k. tarkoittaa melkein kaikkialla Lebesguen mitan m suhteen. Osoita, että $\equiv$ on ekvivalenssirelaatio. (Luonnollisesti $E \neq \emptyset$.)

2. Todista luentorungon Lauseen 2.26 kohta (b').

3. Olkoon $f : \mathbb{R} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ mitallinen ja olkoon $E \in \mathcal{M}$ siten, että $m(E) = 0$. Osoita, että tällöin
$$\int_E f \, dm = 0.$$
Vihje: Osoita väite ensin yksinkertaisille funktioille ja sitten funktioille $f \geq 0$ soveltamalla Lausetta 2.26(d). Lopuksi tapaus $f = f^+ - f^-$.

4. Määritellään $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ asettamalla
$$f(x) = \begin{cases} 1, \, x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \\ 0, \, x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$
Laske perustellen
$$\int_{[0,1]} f \, dm.$$

5. Todista luentorungon Lemma 3.1.
Vihje: Jaa todistus osatapauksiin $b = 0$ ja $b \neq 0$, sekä käytä apufunktiota $g : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$,
$$g(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1,$$
joka saa pienimmän arvonsa pisteessä $t = 1$.

6. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Jos $\{f_n\}$ on Cauchyn jono metriikan d_{L^p} suhteen, niin osoita, että $\{f_n\}$ on Cauchyn jono mitan m suhteen.
Vihje: Kyseessä on luentorungon Lemma 3.9. Apua löytyy liitteenä olevasta kopiosta.