Analyysi 4
Kevät 2002
Palautettavat harjoitukset $4/n$

Seuraavat tehtävät palautetaan kirjallisesti luennoilla erikseen sovittavaan ajankohtaan mennessä. Ratkaisuissa kannattaa olla huolellinen, sillä ne vaikuttavat kurssilta saatavaan arvosanaan.

1. Olkoon $1 \leq p < q < \infty$. Määritellään funktiot $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ ja $g : [0, 2\pi] \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ asettamalla

$$f(\theta) = \theta^{-1/q} \quad \text{ja} \quad g(\theta) = \theta^{-1/2q}.$$

Osoita, että $f \in L^p[0, 2\pi]$, $f \notin L^q[0, 2\pi]$, $g \in L^q[0, 2\pi]$ ja että $g \notin L^\infty[0, 2\pi]$. Tarkasteluissasi voit olettaa, että f ja g ovat mitallisia. (Mitallisuus seuraisi tuskallisten tarkastelujen jälkeen soveltamalla esimerkiksi Lausetta 19.3 kirjasta *Munroe:* Introduction to Measure and Integration.)

Huomautus: Tehtävä osoittaa, että luentorungon Lauseessa 3.10 on voimassa aito inkluusio, toisin sanoen,

$$L^\infty[0, 2\pi] \subsetneq L^q[0, 2\pi] \subsetneq L^p[0, 2\pi].$$

2. Esitä suora todistus Hölderin epäyhtälön sarja-versiolle (epäyhtälö (3.4) luentorungossa), kun $\{a_n\} \subset \mathbb{F}$ ja $\{b_n\} \subset \mathbb{F}$. Toisin sanoen, korvaamalla integraalit sarjoilla, käytä runkona Hölderin epäyhtälön integraaliversion todistusta.

3. Olkoon $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ jono.

   (a) Jos $x_n = (\sqrt[3]{n} + 1)^{-1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin osoita, että $\{x_n\} \in \ell^p$ kaikilla $p > 3$, mutta $\{x_n\} \notin \ell^3$.

   (b) Jos $x_n = (-1)^n (n \sqrt[n]{n})^{-1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin etsi ne indeksien $p, q \in [1, \infty]$ arvot, joilla $\{x_n\} \in \ell^p$, mutta $\{x_n\} \notin \ell^q$.

4. Oletetaan, että $1 \leq p < q \leq \infty$. Lauseen 3.10 innoittamana osoita inkluusio $\ell^p \subset \ell^q$ (so. indeksin p kasvaessa avaruus ℓ^p suurenee).

Vihje: Lauseen 3.10 todistuksesta poiketen et tarvitse nyt Hölderin epäyhtälöä. Käytä sen sijaan suoraa todistusta soveltamalla Analyysi 1:n kurssilta tuttua sarjateorian perustulosta, jonka mukaan jonolle $\{x_n\} \in \ell^p$, $p < \infty$, on voimassa

$$\lim_{n \to \infty} |x_n|^p = 0.$$