**Analyysi 4**
**Kevät 2002**
**Palautettavat harjoitukset** $5/n$

Seuraavat tehtävät palautetaan kirjallisesti luennoilla erikseen sovittavaan ajankohtaan mennessä. Ratkaisuissa kannattaa olla huolellinen, sillä ne vaikuttavat kurssilta saatavaan arvosanaan.

1. Määritellään jono $\{f_n\}$ funktioita $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ asettamalla $f_n(x) = x^n$. Määritä kunkin funktion $f_n$ normi avaruudessa

   (a) $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ (b) $L^1[0,1]$.

   Käytä standardeja normeja.

2. Olkoot $(X, ||\cdot||_1)$ ja $(Y, ||\cdot||_2)$ normiavaruuksia. Olkoon $(Z, ||\cdot||)$ normiavaruus, missä $Z = X \times Y$ ja $||(x,y)|| = ||x||_1 + ||y||_2$. (Kyseessä on todellakin normiavaruus, ks. luentoesimerkki sivulta 25.)

   (a) Osoita, että jono $\{(x_n, y_n)\} \subset Z$ suppenee kohti pistettä $(x, y) \in Z$ jos ja vain jos $\{x_n\} \subset X$ suppenee kohti pistettä $x \in X$ ja $\{y_n\} \subset Y$ suppenee kohti pistettä $y \in Y$.

   (b) Osoita, että $\{(x_n, y_n)\} \subset Z$ on Cauchy jos ja vain jos $\{x_n\} \subset X$ on Cauchy ja $\{y_n\} \subset Y$ on Cauchy.

3. Tehtävän 2 merkinnöin ja tehtävän tulosta soveltaen, osoita seuraava väite: *$Z$ on Banach-avaruus jos ja vain jos $X$ ja $Y$ ovat Banach-avaruuksia.*