Analyysi 4
Kevät 2002
Palautettavat harjoitukset 6/6

Seuraavat tehtävät palautetaan kirjallisesti luennoilla erikseen sovittavaan ajankohtaan mennessä. Ratkaisuissa kannattaa olla huolellinen, sillä ne vaikuttavat kurssilta saatavaan arvosanaan.

1. Osoita, että avaruuden $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ei-standardi normi

$$||x||_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

   ei ole sisätulon indusoima. ($||\cdot||_1$ on todellakin normi — todistus seuraa vaikkapa soveltamalla Lemman 4.2 yläpuolella olevaa esimerkkiä $n-1$ kertaa.)

   Vihje: Osoita, että suunnikassääntö kaatuu sopivasti valituille avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollisen kannan (ks. sivu 3) vektoreille.

2. Olkoon X n-dimensioinen sisätuloavaruus ja olkoon $\{e_1, \ldots, e_n\}$ avaruuden X ortonormaali kanta. Tällöin kaikilla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ pätee

$$\left|\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\right|\right|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2.$$

   Huom: Kun $X = \mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, seuraa tuloksesta Pythagoraan lause.

3. Olkoon $\mathcal{H}$ kompleksinen Hilbertin avaruus ja olkoon $y \in \mathcal{H}$. Osoita, että kuvaus $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, $T(x) =< x, y >$, on jatkuva ja lineaarinen.