

Analyysi I
Harjoitus 3/2002

1. Olkoon $a \neq 0$. Totea toisen asteen polynomin symmetriamuunnoksen

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

paikkansa pitävyyttä.

2. Määrää Cardanon kaavojen avulla yhtälön

$$x^3 + 3x + 4\sqrt{2} = 0$$

reaalinen ratkaisu.

3. Tarkista Tehtävän 2 tulos sijoittamalla ratkaisu yhtälöön ja laskemalla auki.

4. Osoita, että sijoitus $x = y - 5$ muuntaa kolmannen asteen yhtälön

$$x^3 + 15x^2 - 2x + 10 = 0$$

muotoon, jossa Cardanon kaavaa voidaan soveltaa.

5. Olkoon $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - x - 3$ ja $Q(x) = x^2 + 1$. Etsi jakoyhtälön esitys

$$P(x) = A(x)Q(x) + R(x),$$

missä $\deg R \leq 1$.

6. Etsi polynomi $P(x)$ siten, että

$$1 - x^{n+1} = P(x)(1 - x),$$

kun $n \in \mathbf{N}$. (Huom! Polynomihajotelma liittyy läheisesti geometrisen sarjan summan määräämiseen).

7. Olkoot $m, n \in \mathbf{N}$. Mikä polynomi $P(x)$ toteuttaa ehdon

$$\frac{x^{mn} - 1}{x^n - 1} = P(x)?$$

(Vihje! Tehtävä 6).

8. Etsi rationaalifunktion

$$R(x) = \frac{1}{(x+1)(x+3)}$$

osamurtokehitemmä

- (a) yhtälöparin ratkaisuna,
(b) eliminointimenetelmällä.